Devoir non surveillé 15

À rendre le mardi 16 janvier

Exercice 1

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$.
2. Donner, sans justification, la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ ainsi que son ensemble de définition.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆⋆

3. **Étude d'une suite.**
   a. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}} \mathrm{d}t$ converge pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   b. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n} \mathrm{d}t$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.
4. **Étude de la série de terme général $u_n - \ell$.**
   a. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t \in [0,1]$, on pose : $g_p(t) = (1-t)t^{p(n+1)}$.
   Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.
   b. Calculer l'intégrale $\int_0^1 g_p(t) \mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.
   c. En utilisant la série de fonctions définie au a, démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}.$$
   d. Pour tout p entier naturel non nul, on pose : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h_p(t) = \frac{t^2}{((t+1)p+2)((t+1)p+1)}$.
   Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
   e. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :
   $$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   On admettra que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 (très classique)

On souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :
$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$
3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$
5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction
$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$
est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad p_{i,j} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur du réel α.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.
3. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
5. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient en i^{e} ligne et j^{e} colonne est :
$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad b_{i,j} = \mathbb{P}_{(X=j)}(Y = i).$$
Calculer les $b_{i,j}$.

6. Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$.
7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que : $B = CL$.
8. Démontrer que $B^2 = \mathrm{tr}(B)B$.
9. Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (facultatif)

On se donne une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$.

1. Justifier que A est un événement, et décrire cet événement en langage courant.
2. Montrer que $P(A) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$.
3. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Déterminer $P(A)$.
4. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ diverge et que les événements A_n sont mutuellement indépendants. Déterminer $P(A)$. On pourra s'intéresser à $P(\overline{A})$.