Devoir non surveillé 14 - Correction

Problème
Mines PC 2017 Maths II

Partie I : Deux représentations de S_α

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée et $||f_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$. Puisque $\alpha > 1$, d'après l'exemple de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_\infty$ converge, donc la série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

   D'après un théorème du Cours (convergence normale et donc uniforme, et continuité pour une série d'applications), on conclut :
$$\boxed{S_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

2. Comme $t \geq 0$, et $|u| < 1$, $e^t - u \neq 0$. Aussi $J : t \longmapsto \dfrac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives.

   • au voisinage de 0, $J(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{(1-u)t^{1-\gamma}}$ qui est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $1 - \gamma < 1$, ou $\gamma > 0$.

   • au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 J(t) = 0$ (grâce à e^{-t}). Donc, par comparaison, J est intégrable sur $[A, +\infty[$ quelque soit γ.

   En conclusion : $\boxed{J \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\text{ si et seulement si } \gamma > 0.}$

Soit $t \geqslant 0$. On pose,
$$R_N(t,u) = \left(\frac{u}{\mathrm{e}^t - u} - u\mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (u\mathrm{e}^{-t})^n \right) t^{\alpha-1}.$$

3. On a, pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, par sommation géométrique et puisque $|u\,\mathrm{e}^{-t}| \leqslant |u| < 1$, donc $u\,\mathrm{e}^{-t} \neq 1$:
$$R_N(t,u) = \Big(\frac{u}{\mathrm{e}^{t} - u} - u\,\mathrm{e}^{-t}\frac{1-(u\,\mathrm{e}^{-t})^N}{1-u\,\mathrm{e}^{-t}}\Big)t^{\alpha-1} = \Big(\frac{u}{\mathrm{e}^{t}-u} - \frac{u(1-u^N\,\mathrm{e}^{-Nt})}{\mathrm{e}^{t}-u}\Big)t^{\alpha-1} = \frac{u^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t}-u}.$$

4. **1ère méthode :**

   • Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(\cdot, u)$ est continue par morceaux sur $]0\,; +\infty[$.

   • La suite $\big(R_N(\cdot,u)\big)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers l'application nulle sur $]0\,; +\infty[$, car $|u| < 1$ et $t > 0$, donc $u^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt} \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$.

   • L'application nulle est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,; +\infty[$.

• D'après 2- : $\quad \forall t \in]0\,;+\infty[,\quad \big|R_N(t,u)\big| = \dfrac{|u|^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t}-u} \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t}-u} = J(t),$

et J est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ d'après 2-, avec α à la place de γ.

D'après le théorème de convergence dominée, on conclut que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(\cdot,u)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0.$

2ème méthode :

• Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$*$ L'application $R_N(\cdot,u)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, d'après sa définition en 2-, ou d'après l'expression obtenue en 3-.

$*$ En 0 : $R_N(t,u) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{u^{N+1}}{1-u}t^{\alpha-1} \geqslant 0$, donc, d'après l'exemple de Riemann en 0 et le théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$, $R_N(\cdot,u)$ est intégrable à la borne 0.

$*$ En $+\infty$: $t^2R_N(t,u) = \dfrac{u^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha+1}}{\mathrm{e}^{t}-u} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, comme en 3-, $R_N(\cdot,u)$ est intégrable à la borne $+\infty$.

Ainsi, $R_N(\cdot,u)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

• On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $\quad |R_N(t,u)| = \dfrac{|u|^{N+1}\,\mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t}-u} \leqslant \dfrac{|u|^{N+1}}{1-u}\,\mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha-1},$

donc :

$$\left|\int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_N(t,u)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{|u|^{N+1}}{1-u}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Nt}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{[s=Nt]}{=} \frac{|u|^{N+1}}{1-u}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\Big(\frac{s}{N}\Big)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{N} = \frac{|u|^{N+1}}{1-u}\frac{1}{N^{\alpha}}\Gamma(\alpha) \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $|u| < 1$ (et $\alpha > 0$).

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0}$$

5. • Le résultat de 2-, avec α à la place de γ, prouve que, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$, l'application $t \longmapsto \dfrac{ut^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t}-u}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

• On a, en utilisant le développement en série entière géométrique et la définition de $R_N(t,u)$, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$:

$$\frac{ut^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t}-u} = \frac{ut^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}}{1-u\,\mathrm{e}^{-t}} = ut^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{N-1}(u\,\mathrm{e}^{-t})^n + R_N(t,u).$$

Les applications en question étant toutes intégrables sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t}-u}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} ut^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}(u\,\mathrm{e}^{-t})^n\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t$$

et :

$$\int_0^{+\infty} ut^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}(u\,\mathrm{e}^{-t})^n\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{[s=(n+1)t]}{=} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} \Big(\frac{s}{n+1}\Big)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{d}s}{n+1}$$

$$= \Big(\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-s} \, \mathrm{d}s\Big) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \underset{[n \longleftarrow n+1]}{=} \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{N} \frac{u^n}{n^\alpha}.$$

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - u} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \Gamma(\alpha) \frac{u^n}{n^\alpha} + \int_0^{+\infty} R_N(t,u) \, \mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$, il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \Gamma(\alpha) \frac{u^n}{n^\alpha}$ converge. De plus, comme $\Gamma(\alpha) \neq 0$ (car $\Gamma(\alpha) > 0$), la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u^n}{n^\alpha}$ converge, et on déduit, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\boxed{\forall\, \alpha \in]0\,;+\infty[, \quad \int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - u} \, \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}}$$

6. On admet que l'identité (**??**) reste vraie aussi pour $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ où $x \in]0, 2\pi[$.
Soit $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe alors $X \in]0\,;2\pi[$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $x = X + 2k\pi$.
On applique (2) à $u = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}$ (résultat admis dans l'énoncé) :

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - u} \, \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nX}}{n^\alpha}.$$

Comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nX}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nX}{n^\alpha} + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nX}{n^\alpha},$$

on a donc :

$$\Gamma(\alpha) S_\alpha(x) = \mathrm{Im}\Big(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X} t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}} \, \mathrm{d}t\Big) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X} t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X}}\Big) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X} t^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,X})}{(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X})(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,X})}\Big) \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,X} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{t} - t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{2t} - 2\cos X \, \mathrm{e}^{t} + 1}\Big) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin X t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{t} - 2\cos X + \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t = \frac{\sin X}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\, t - \cos X} \, \mathrm{d}t.$$

Finalement, comme $\Gamma(\alpha) \neq 0$ (car $\Gamma(\alpha) > 0$), et que $x \equiv X \quad [2\pi]$:

$$\boxed{S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\, t - \cos x} \, \mathrm{d}t}$$

7. On ne pouvait pas ici utiliser le théorème de convergence uniforme car ici $t \longmapsto \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{n+1}}$ est continue sur $]0, M]$ ($\alpha - 1$ peut être négatif).
L'utilisation du théorème de convergence dominée et le théorème d'intégration terme à term aboutissent.
On choisit la première solution.
On écrit que $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t) - u} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \times \dfrac{1}{1 - \frac{u}{\mathrm{ch}(t)}}$, et comme $\left|\dfrac{u}{\mathrm{ch}(t)}\right| < 1$, on a

$$\forall t \in]0, M], \quad \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch} t - u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{n+1}}$$

- La série de fonctions de t, $\sum \dfrac{u^n t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{n+1}}$ converge simplement sur $[0, M]$ (car $|u| < 1$ et $\mathrm{ch}(t) \geq 1$) et sa somme $S : t \longmapsto \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch} t - u}$ est continue par morceaux sur $]0, M]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \longmapsto \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{n+1}}$ est continue par morceaux sur $]0, M]$.
- Hypothèse de domination : pour tout $t \in]0, M]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{k+1}} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|u|^k t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} n \frac{|u|^k t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{k+1}} = \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch} t - |u|} = \varphi(t).$$

On montrerait que φ est intégrable sur $]0, M]$. Et donc par le théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions, on a :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}(t) - u} dt = \int_0^M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{n+1}} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}(t))^{n+1}} dt$$

8. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n :]0\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \longmapsto h_n(M) = \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $h_n(M) \underset{M \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t$ car l'application $t \longmapsto u^n \dfrac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}$ est intégrable sur $]0\,; +\infty[$, comme plus haut.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $M \in]0\,; +\infty[$:

$$\begin{aligned} |h_n(M)| = \left| \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^M \left| u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \right| \mathrm{d}t = |u|^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \\ \leqslant |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \leqslant |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\, t} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est bornée et que :

$$||h_n||_\infty \leqslant |u|^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\, t} \, \mathrm{d}t.$$

Comme $|u| < 1$, la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} |u|^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} ||h_n||_\infty$ converge, donc la série d'applications $\sum\limits_{n \geqslant 0} h_n$ converge normalement sur $]0\,; +\infty[$.

D'après un théorème du Cours (convergence normale et limite), on peut permuter limite et série, d'où :

$$\boxed{\lim_{M \longrightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t}$$

Il en résulte d'après 7- :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\, t - u} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. On applique 7- à $u = \cos x$ (on a bien $u \in]-1\,;1[$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Puis, en utilisant 6- :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \right) \cos^n x = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos^n x.$$

On conclut, avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \quad S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} G_\alpha(\cos x)}$$

Partie II : Comportement asymptotique

Soit $B :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^{+\infty} |B(s)|\,\mathrm{d}s < +\infty. \tag{1}$$

$$B(s) = a s^{\lambda-1}(1 + \mathrm{o}(1)),\ \ s \to 0^+,\ \ a > 0,\ \ \lambda \in]0, +\infty[. \tag{2}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $B(s) = a s^{\lambda-1}\big(1 + o(1)\big)$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, s \in]0\,;\delta], \quad \left|B(s) - a s^{\lambda-1}\right| \leqslant \varepsilon a s^{\lambda-1}.$$

On a alors, pour tout $s \in]0\,;\delta]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right| = \left|B(s) - a s^{\lambda-1}\right| \mathrm{e}^{-ns} \leqslant \varepsilon a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns},$$

puis, les fonctions intervenant étant intégrables sur $]0\,;\delta]$:

$$\begin{aligned}\left| \int_0^\delta \left(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right) \mathrm{d}s \right| &\leqslant \int_0^\delta \left|B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right| \mathrm{d}s \leqslant \int_0^\delta \varepsilon a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \\ &= \varepsilon a \int_0^\delta s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \underset{[t=ns]}{=} \varepsilon a \int_0^{n\delta} \left(\frac{t}{n}\right)^{\lambda-1} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda} \int_0^{n\delta} t^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon a}{n^\lambda} \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda).\end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^\delta \left(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right) \mathrm{d}s \right| \leqslant \varepsilon \frac{a}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)}$$

2. Soit $\delta > 0$ fixé. On a, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\left| \int_\delta^{+\infty} \left(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right) \mathrm{d}s \right| \leqslant \int_\delta^{+\infty} \left|B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - a s^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right| \mathrm{d}s$$

$$= \int_{\delta}^{+\infty} \left|B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}\right| \mathrm{e}^{-(n-1)s}\,\mathrm{d}s \leqslant \left(\int_{\delta}^{+\infty} \left|B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}\right| \mathrm{d}s\right) \mathrm{e}^{-(n-1)\delta},$$

d'où le résultat demandé, en notant $C(\delta) = \displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} \left|B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}\right| \mathrm{d}s$ et en remarquant que l'application $s \longmapsto B(s)\,\mathrm{e}^{-s} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-s}$ est bien intégrable sur $[\delta\,;+\infty[$.

3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après 10-, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\int_0^{\delta} \left(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right) \mathrm{d}s\right| \leqslant \varepsilon \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda).$$

Puis, δ étant ainsi fixé, d'après 11-, on a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty} \left(B(s)\,\mathrm{e}^{-ns} - as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\right) \mathrm{d}s\right| \leqslant C(\delta)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}.$$

On a donc, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\left|\int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s - \int_0^{+\infty} as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_0^{+\infty} \left(B(s) - as^{\lambda-1}\right) \mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s\right|$$
$$= \left|\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{+\infty}\right| \leqslant \left|\int_0^{\delta}\right| + \left|\int_{\delta}^{+\infty}\right| \leqslant \varepsilon \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda) + C(\delta)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}.$$

Par prépondérance classique : $\qquad \mathrm{e}^{-(n-1)\delta} = \underset{n\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\lambda}}\right),$

donc, pour n assez grand : $\qquad \left|C(\delta)\,\mathrm{e}^{-(n-1)\delta}\right| \leqslant \varepsilon \dfrac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda).$

Il en résulte, pour n assez grand :

$$\left|\int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s - \int_0^{+\infty} as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s\right| = \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda)\, o(1).$$

Enfin :

$$\int_0^{+\infty} as^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s \underset{[t=ns]}{=} a \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^{\lambda-1} \mathrm{e}^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{a}{n^{\lambda}} \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{n^{\lambda}} \Gamma(\lambda).$$

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} B(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s = a \frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}} \left(1 + \underset{n\infty}{o}(1)\right)}$$

4. On a, par le changement de variable $v = \mathrm{ch}\, t$, de classe C^1 et bijectif de $]0\,;+\infty[$ sur $]1\,;+\infty[$, donc qui conserve l'intégrabilité :

$$v = \mathrm{ch}\, t, \quad t = \mathrm{Argch}\, v = \ln(v + \sqrt{v^2 - 1}), \quad \mathrm{d}v = \mathrm{sh}\, t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{sh}\, t} = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2 - 1}},$$

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\left(\ln(v + \sqrt{v^2 - 1})\right)^{\alpha-1}}{v^{n+1}} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2 - 1}},$$

puis, par le changement de variable $s = \ln v$, de classe C^1 et bijectif de $]1\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$, donc qui conserve l'intégrabilité :

$$s = \ln v, \quad v = \mathrm{e}^{s}, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s,$$

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln(\mathrm{e}^{s} + \sqrt{\mathrm{e}^{2s} - 1})\right)^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{(n+1)s}} \frac{\mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s} - 1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln(\mathrm{e}^{s} + \sqrt{\mathrm{e}^{2s} - 1})\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s} - 1}}\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s.$$

5. On a, au voisinage de 0^+ :

$$\mathrm{e}^{s}+\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}=\big(1+s+o(s)\big)+\sqrt{2s+o(s)}=1+\sqrt{2s}+o(\sqrt{s}),$$

$$\ln(\mathrm{e}^{s}+\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1})=\ln\big(1+\sqrt{2s}+o(\sqrt{s})\big)=\sqrt{2s}+o(\sqrt{s})\underset{s\longrightarrow 0^+}{\sim}\sqrt{2s}$$

et :

$$\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}=\sqrt{\big(1+2s+o(s)\big)-1}=\sqrt{2s+o(s)]}\underset{s\longrightarrow 0^+}{\sim}\sqrt{2s},$$

d'où :

$$B(s)=\frac{\big(\ln(\mathrm{e}^{s}+\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1})\big)^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}\underset{s\longrightarrow 0^+}{\sim}\frac{(\sqrt{2s})^{\alpha-1}}{\sqrt{2s}}=(\sqrt{2s})^{\alpha-2}.$$

On conclut :

$$\boxed{B(s)\underset{s\longrightarrow 0^+}{\sim}(\sqrt{2s})^{\alpha-2}}$$

6. L'application B de 14- satisfait les conditions (4) et (5) (et la continuité) car :

• En 0 : $B(s)\underset{s\longrightarrow 0^+}{\sim}(\sqrt{2s})^{\alpha-2}=2^{\frac{\alpha}{2}-1}s^{\frac{\alpha}{2}-1}\geqslant 0$ et $\dfrac{\alpha}{2}-1>-1$, donc, par l'exemple de Riemann en 0 et le théorème d'équivalence pour des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$, B est intégrable sur $]0\,;1]$.

• En $+\infty$:

$$B(s)=\frac{\big[\ln\big(\mathrm{e}^{s}[1+(1-\mathrm{e}^{-2s})^{1/2}]\big)\big]^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}=\frac{\big[\ln\big(\mathrm{e}^{s}[2+o(1)]\big)\big]^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}=\frac{\big[s+\ln\big(2+o(1)\big)\big]^{\alpha-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2s}-1}}\underset{s\longrightarrow +\infty}{\sim}\frac{s^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{s}},$$

donc, comme en 1-, B est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

On peut remarquer : $a_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}B(s)\,\mathrm{d}s$.

• En 0^+, on a vu : $B(s)\underset{s\longrightarrow 0^+}{\sim}2^{\frac{\alpha}{2}-1}s^{\frac{\alpha}{2}-1}$, donc $B(s)=as^{\lambda-1}\big(1+o(1)\big)$, en notant $a=2^{\frac{\alpha}{2}-1}>0$ et $\lambda=\dfrac{\alpha}{2}>0$.

D'après 12-, on a donc :

$$a_n=\int_0^{+\infty}B(s)\,\mathrm{e}^{-ns}\,\mathrm{d}s=a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}}\big(1+o(1)\big)\underset{n\infty}{\sim}a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}}=2^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\alpha}{2}\Big)}{n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

d'où :

$$a_n n^{\frac{\alpha}{2}}\underset{n\infty}{\sim}2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}\Big),$$

et finalement :

$$\boxed{a_n n^{\frac{\alpha}{2}}\lim 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)}$$