Devoir non surveillé 13 - Correction

Problème
ESIM PC 2003

1. (a) D'une part, si $u \in F$ alors $\sum |u_n|$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, $u \in E$ et donc $F \subset E$.
D'autre part, F est évidemment non vide (puisqu'il contient la suite nulle) et, si u et w sont deux éléments de F et si λ, μ sont deux nombres complexes, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\lambda u_n + \mu w_n| \leq |\lambda|.|u_n| + |\mu|.|w_n|.$$

Or, $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent donc $\sum \big(|\lambda|.|u_n| + |\mu|.|w_n|\big)$ converge aussi. Et par les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\sum |\lambda u_n + \mu w_n| \text{ converge.}$$

Ainsi $\lambda u + \mu w \in F$ et $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

(b) $S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique v, on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n(v) = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} \text{ si } z \neq 1 \\ \\ n+1 \text{ si } z = 1 \end{cases}}$$

2. Soit $u \in E$. Il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$. Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| u_n \dfrac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} \right| \leq M \dfrac{|x|^n}{n!} \mathrm{e}^{-x}$.

Or, la série $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge (cours), donc par comparaison, $\boxed{\text{pour } x \in \mathbb{R}, \text{ la série } \sum u_n \dfrac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} \text{ converge.}}$

3. On a $\Phi_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \dfrac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(zx)^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{zx}\mathrm{e}^{-x}$. Et donc $\boxed{\Phi_v(x) = \mathrm{e}^{(z-1)x}.}$

4. Soit $u \in E$ et $M > 0$ un majorant de $|u_n|$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| S_n(u) \frac{x^n}{n!} \right| \leq M(n+1) \frac{|x|^n}{n!} \leq Mx \frac{n+1}{n} \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Par croissances comparées, le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et par le théorème d'encadrement, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n(u) \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Par caractérisations du rayon de convergence, on a bien :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum S_n(u) \frac{x^n}{n!} \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

5. • Si $z \neq 1$, on a, en manipulant des séries numériques qui sont toutes convergentes :

$$\Psi_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(v) \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-z} \mathrm{e}^{x} - \frac{z\mathrm{e}^{-x}}{1-z} \mathrm{e}^{zx} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-z} \left(\mathrm{e}^{x} - z\mathrm{e}^{zx} \right)$$

• Si $z = 1$:

$$\Psi_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} = x + 1.$$

6. Puisque les séries entières $\sum u_n \frac{x^n}{n!}$ et $\sum S_n(u) \frac{x^n}{n!}$ sont de rayon de convergence infini, leurs sommes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et donc, par multiplication par la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, qui est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que Φ_u et Ψ_u sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{\Phi_u \text{ et } \Psi_u \text{ sont indéfiniment dérivables sur } \mathbb{R}.}$

Problème - Partie II

1. Soit z tel que $|z| < 1$, ainsi v est un élément de F.

• On a vu que $\Phi_v(x) = \mathrm{e}^{(z-1)x}$. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_v(x)dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(z-1)x} dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{(z-1)x}}{z-1} \right]_{x=0}^{x \to +\infty}$.
Or, $|z| < 1$ donc, si l'on note $z = a + ib$, alors $a =$Re$(z) < 1$ et $a - 1 < 0$. On a alors

$$|\mathrm{e}^{(z-1)x}| = |\mathrm{e}^{(a-1)x+ibx}| = \mathrm{e}^{(a-1)x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0.$$

En reportant dans le calcul précédent, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_v(x)dx = \frac{1}{1-z}$.

• On a aussi, puisque $|z| < 1$, $S(v) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

• Enfin, puisque $|z| < 1$, on a vu que $\Psi_v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-z} \left(\mathrm{e}^{x} - z\mathrm{e}^{zx} \right)$. On a donc :

$$\Psi_v(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-z} \left(\mathrm{e}^{x} - z\mathrm{e}^{zx} \right) = \frac{1}{1-z} \left(1 - z\mathrm{e}^{(z-1)x} \right) \underset{x \to +\infty}{\to} \frac{1}{1-z}.$$

On a bien démontré que $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Psi_v(x) = \int_0^{+\infty} \Phi_v(x)dx = S(v).}$

2. (a) En intégrant par parties, on montre facilement **(E1)** par récurrence, que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!.}$

(b) On utilise le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions. On vérifie précisément ses hypothèses.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : x \in [0, +\infty[\longmapsto \dfrac{u_n}{n!} x^n \mathrm{e}^{-x}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ (cf. II.2.(a)).
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ (cf. I.2.), et a pour somme Φ_u.

- Φ_u est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (cf. I.6.)
- La série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}|x|^n \mathrm{e}^{-x}dx = \frac{|u_n|}{n!}\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}dx = |u_n|,$$

  et que $u \in F$.

Par conséquent, $\boxed{\Phi_u \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[}$ et on a les égalités suivantes.

$$\int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

On a donc bien $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx = S(u).}$

3. Soit $u \in F$.

   (a) C'est presque un **(E1)**.

   On note encore, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : x \in [0,+\infty[\longmapsto \dfrac{u_n}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}$. Pour majorer convenable $||f_n||_\infty$, on dresse le tableau des variations de f_n. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\ +\infty[$ et, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0\ +\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{u_n}{n!}(nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x}) = \frac{u_n}{n!}(n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

   On obtient les variations suivantes pour f_n.

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(t)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	0

   Ainsi, $||f_n||_\infty = |f_n(n)| = |u_n|\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}$.

   D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n}$, donc $\dfrac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, d'où $||f_n||_\infty = \underset{n\infty}{o}(|u_n|)$.

   Comme la série de terme général $|u_n|$ converge, il en résulte que la série de terme général $||f_n||_\infty$ converge, et donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum u_n \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \text{ converge normalement sur } [0,+\infty[.}$

   Autre méthode : par une majoration.

   Puisque tous les termes sont positifs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

   Et donc $\forall x \geq 0,\ |f_n(x)| = \left|\dfrac{u_n}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}\right| = |u_n|\dfrac{x^n}{n!}e^{-x} \leq |u_n|$.

   On a alors $\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq |u_n|$.

   Et comme $\sum |u_n|$ converge, par comparaison, $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

(b) La série de fonctions $\sum f_n$ définie précédemment converge normalement, donc converge uniformément, sur $[0,+\infty[$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=u_n\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc, d'après le théorème de double limite, on peut permuter $\lim\limits_{x\to+\infty}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$. On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi_u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(u_n\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}0.$$

On a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi_u(x)=0.}$

4. (a) La série entière $\sum u_n\dfrac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini, donc sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver terme à terme.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Or, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n\dfrac{x^n}{n!}=\Phi_u(x)\mathrm{e}^x$, donc

$$\begin{aligned}\Psi_u(x)+e^{-x}\frac{d}{dx}\Big[\Phi_u(x)e^x\Big] &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_n(u)\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(S_{n-1}(u)+u_n\big)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x}\\ &= \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(u)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

On a bien démontré $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}S_n(u)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\Psi_u(x)+\mathrm{e}^{-x}\dfrac{d}{dx}\Big[\Phi_u(x)\mathrm{e}^x\Big].}$

(b) On a $\Psi_u(x)=\mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n(u)\dfrac{x^n}{n!}$ et Ψ_u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On peut dériver terme à terme.

$$\begin{aligned}\Psi_u'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(u)\frac{x^n}{n!}+\mathrm{e}^{-x}\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(u)\frac{x^n}{n!}\right]\\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(u)\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(u)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(-\mathrm{e}^x\Psi_u(x)+\mathrm{e}^x\Psi_u(x)+\frac{d}{dx}\Big[\Phi_u(x)\mathrm{e}^x\Big]\right) \;=\; \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x\Phi_u(x)+\mathrm{e}^x\Phi_u'(x)\right)\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad \Psi_u'(x)=\Phi_u(x)+\Phi_u'(x).}$

(c) On intègre cette égalité entre 0 et $t \in \mathbb{R}$. On obtient : $\Psi_u(t) - \Psi_u(0) = \displaystyle\int_0^t \Phi_u(x)dx + \Phi_u(t) - \Phi_u(0)$. Or $\Psi_u(0) = \Phi_u(0) = u_0$ donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Psi_u(t) = \int_0^t \Phi_u(x)dx + \Phi_u(t).}$$

5. On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi_u(x) = 0$, et aussi que Φ_u est intégrable sur $[0, +\infty[$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx = S(u)$. Quand t vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\boxed{\forall u \in F, \ \lim_{x\to+\infty} \Psi_u(x) = \int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx = S(u).}$$

Problème - Partie III

1. (a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx &= \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^k dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{k=0}^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.}$

(b) On a $0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \le \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum u_k$ et la relation suivante.

$$\boxed{S(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).}$$

(c) La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$ est alternée et son terme général, en valeur absolue, décroˆıt vers 0. D'après le théorème des séries alternées, cette série converge (ce qu'on vient de voir) et la valeur absolue du reste partiel est inférieure ou égale à la valeur absolue de son premier terme, c'est-à-dire

$$\boxed{|r_n| \le \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right| = \frac{1}{n+1}.}$$

(d) D'après $III.1$, on a $S_n(u) = S(u) - r_n = \ln(2) - r_n$. Sous la condition que les sommes existent, on a

$$\Psi_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(u)\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = \ln(2)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} - \sum_{n=0}^{+\infty} r_n\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

On a d'une part, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$ existe donc tous les termes précédents sont bien définis. On s'intéresse maintenant à la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}r_n\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$. On veut déterminer sa limite quand $x\to+\infty$. Il s'agit donc de permuter $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}$. On montre que la série converge normalement. Comme dans la question $II.3.(a)$, l'étude de $h_n : x\in[0,+\infty[\longmapsto h_n(x)=r_n\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ donne

$$||h_n||_\infty=|h_n(n)|=|r_n|\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}\leq\frac{1}{n+1}\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Or, la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente, donc par comparaison, $\sum||h_n||_\infty$ converge aussi. Ainsi, $\sum h_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, et donc aussi uniformément (PSI et MP). Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}h_n(x)=0$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}r_n\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}h_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}0.$$

Ainsi, en reportant dans l'égalité précédente, on obtient bien $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Psi_u(x)=\ln(2).}$

2. (a) Si $x\neq0$, on a

$$\Phi_u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)!}\Big)\mathrm{e}^{-x}=-\frac{1}{x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Big)\mathrm{e}^{-x}=-\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-x}-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } x\neq0,\text{ alors }\Phi_u(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}.}$

Si $x=0$, le premier coefficient de la série entière donne $\boxed{\Phi_u(0)=1.}$

On a vu que Φ_u est continue sur $[0,+\infty[$ et $|\Phi_u(x)|=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, on a bien $\boxed{\Phi_u\text{ est intégrable sur }[0,+\infty[.}$

(b) On considère l'application $g:(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[\longmapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-xt}}{t}$.

Elle admet une dérivée partielle par rapport à x et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=e^{-xt}$.

- Pour tout $t\in]0,+\infty[$, l'application $x\longmapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=e^{-xt}$ est continue sur $[a,+\infty[$.
- Soit $x\in[a,+\infty[$: les applications $t\longmapsto g(x,t)$ et $t\longmapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $]0,+\infty[$. Montrons qu'elles y sont intégrables.

  $\hookrightarrow$ en $+\infty$: $|g(x,t)|=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or, $x\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par comparaison, $t\longmapsto g(x,t)$ et $t\longmapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ le sont aussi.

  $\hookrightarrow$ en 0 : elles sont prolongeables par continuité (à détailler pour la première).

  Et donc, $t\longmapsto g(x,t)$ et $t\longmapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

- Hypothèse de domination : On a, pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at},$$

  et l'application $t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}$ est continue par morceaux, positive ou nulle et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, il en résulte que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et que, pour tout $x \in [a+\infty[$ on a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\Big]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Par primitivation, on obtient, pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt = \int_a^x \frac{1}{t}dt = \ln(x) - \ln(a).$$

3. On écrit ce résultat avec $a = 1$ et en $x = 2$:

$$F(2) = \ln(2) - 0 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}dx = \int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx.$$

   D'autre part, on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi_u(x) = \ln(2)$. On a donc bien encore $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi_u(x) = \int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx.}$