# Devoir non surveillé 13

**À rendre le mardi 12 décembre (facultatif)**

## Notations

On désigne par $E$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées. C'est-à-dire :

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M\}.$$

Pour tout entier naturel $n$ et pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose : $S_n(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

On note $F$ l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum |u_n|$ converge. On note alors, pour tout $u \in F$,

$$S(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n(u).$$

On considère un nombre complexe $z$ de module inférieur ou égal à 1.
On désigne alors par $v$, **dans tout le problème**, l'élément de $E$ défini par

$$v = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

## Partie I

1. (a) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

   (b) Exprimer $S_n(v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ suivant les valeurs de $z$.

2. Soit $u \in E$. Montrer que pour tout réel $x$ la série $\sum u_n \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ converge.
   On notera
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Calculer $\Phi_v(x)$.

4. Soit $u \in E$. Montrer que la série entière $\sum S_n(u)\dfrac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
   On notera $\Psi_u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Psi_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(u)\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

5. Calculer $\Psi_v(x)$ suivant les valeurs de $z$.

6. Montrer que $\Phi_u$ et $\Psi_u$ sont des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

## Partie II

Le but de cette partie est de prouver que, si $u \in F$ :

$$\lim_{x \to +\infty} \Psi_u(x) = \int_0^{+\infty} \Phi_u(x) dx = S(u).$$

1. On suppose dans cette question que $|z| < 1$, ainsi $v$ est un élément de $F$.
   Vérifier que : $$\lim_{x \to +\infty} \Psi_v(x) = \int_0^{+\infty} \Phi_v(x) dx = S(v).$$
2. Soit $u \in F$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   On justifiera son existence.
   (b) Montrer que $\Phi_u$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_u(x) dx = S(u)$.
3. Soit $u \in F$.
   (a) Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum u_n \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Phi_u(x) = 0$.
4. On considère $u \in E$.
   (a) En justifiant convenablement les dérivations, montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(u) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \Psi_u(x) + \mathrm{e}^{-x} \frac{d}{dx}\left[\Phi_u(x)\mathrm{e}^{x}\right].$$
   (b) En écrivant $\displaystyle\Psi_u(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(u) \frac{x^n}{n!}$, établir que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Psi_u'(x) = \Phi_u(x) + \Phi_u'(x).$$
   (c) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \displaystyle\Psi_u(t) = \int_0^t \Phi_u(x) dx + \Phi_u(t)$.
5. Conclure que, si $u \in F$ :
   $$\lim_{x \to +\infty} \Psi_u(x) = \int_0^{+\infty} \Phi_u(x) dx = S(u).$$

## Partie III

On considère la suite $u$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Le but de cette partie est de comparer $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi_u(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx$.

1. (a) Justifier l'égalité suivante.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

   (b) En déduire la valeur de $S(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

   (c) On note $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Montrer que $|r_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (d) En remarquant que $S_n(u) = \ln(2) - r_n$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi_u(x) = \ln(2)$.

2. (a) Déterminer $\Phi_u(x)$ et montrer que $x \longmapsto \Phi_u(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   (b) On fixe $a > 0$. Pour $x \geq a$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-xt}}{t} dt$.

   Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et en déduire la valeur de $F(x)$.

3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi_u(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_u(x)dx$.