Devoir non surveillé 12 - Correction

Problème
Extrait de CCINP MP 2023 maths 1

Un corrigé de S. Oiry

1. La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est <u>continue</u> et <u>positive</u> sur $]0,1]$ ainsi que sur $[1,+\infty[$

   En 0, on a $\varphi(t) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x$ est intégrable car $1-\alpha<1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $]0,1]$.

   En $+\infty$, on a $\varphi(t) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$ est intégrable car $2-\alpha>1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

2. On a successivement :

$$\begin{aligned} I(1-\alpha) &= \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &\text{on effectue le changement de variable } x=\frac{1}{u} \\ I(1-\alpha) &= \int_{+\infty}^1 \frac{u^{\alpha}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u \\ &= J(\alpha) \end{aligned}$$

3. Pour x fixé dans $]0,1[$, $f_n(x)$ est le terme général d'une série géométrique et $|f_n(x))<1$, la série est donc convergente :

   On a donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$

   supposons que la série converge uniformément sur $]0,1[$.

   Comme $\underset{x\to 1}{lim} f_n(x) = (-1)^n$

   Le théorème de la double limite entrainerait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ converge ce qui n'est pas le cas.

   Donc la série ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

4. Comme $S_n(x) = x^{\alpha-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

   On note $\varphi_n : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

   - $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\mapsto \varphi_n(x)$ est continue sur $[0,1]$.

- $\forall x \in]0,1[$, $\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) = 0$ et φ est continue par morceau sur $]0,1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \times 2$ et la fonction $x \mapsto 2\,\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 19.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,
$\underset{n\to+\infty}{lim} \displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \underset{n\to+\infty}{lim} S_n(x)\,\mathrm{d}x = I(\alpha)$

Comme $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

5. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha) + J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

   par ailleurs :

$$\begin{aligned}
I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1-\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-\alpha+1+k} \\
&\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p = k+1 \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{-\alpha+n}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-2\alpha)}{-\alpha^2+n^2} \\
I(\alpha) + J(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

6. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{sin(\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right)$$

   On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

15. Soit $x > 0$, on note $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$
    ψ_x est continue et positive sur $]0, +\infty[$

$\psi_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ donc par équivalent avec une intégrale de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$t^2\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi Γ est bien définie pour tout $x \in]0,+\infty[$.

16. - Pour $x=0$, on retrouve $f_\alpha(0) = \dfrac{\pi}{sin(\alpha\pi)}$ d'après la question 14.
    - Pour $x>0$, $\mu : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,e^{-xt}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$

      $\mu(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ et on prouve comme à la question 9 que $\displaystyle\int_0^1 \mu(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

      $t^2\mu(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\mu(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mu(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

    Ainsi f_α est bien définie sur $[0,+\infty[$.

    Démontrons maintenant que f_α est continue sur $[0,+\infty[$.

    On note λ la fonction définie sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par $\lambda : (x,t) \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,e^{-xt}$

    - Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto \lambda(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$
    - Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $t \mapsto \lambda(x,t)$ est continue par morceau (car continue) sur $]0,+\infty[$
    - Pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|\lambda(x,t)| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 9.

    Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f_α est continue sur $[0,+\infty[$.

17. Soit a et b réels tels que $0<a<b$, on conserve la notation de λ de la question précédente que l'on définit cette fois sur $[a,b]\times]0,+\infty[$

    - $\forall x \in [a,b]$, $t \mapsto \lambda(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 16 (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).
    - $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto \lambda(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$
    - $\forall x \in [a,b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$
    - $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-at}$ et $t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et c'est un $\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0,+\infty[$

    On peut donc conclure par théorème de dérivation que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
    Ceci étant pour tout a et b de $]0,+\infty[$, on en conclut que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $f'_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha}{1+t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

18. On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisée

    Soit $x>0$, on note $\lambda_x : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,e^{-xt}$ définie sur $]0,+\infty[$

- $\forall x > 0$, $t \mapsto \lambda_x(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $\forall t \in]0, +\infty[$, $\lambda_x(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda(t) = 0$ et $t \mapsto 0$ est continue par morceau sur $]0, +\infty[$
- $\forall (x,t) \in (]0, +\infty[)^2$, $|\lambda_x(t)| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (vu question précédente)

Donc par théorème de convergence dominée généralisée :

$$\underset{x\to+\infty}{lim} f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \underset{x\to+\infty}{lim} \lambda_x(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

19. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$,
$\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$ donc par équivalent $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.
et $t^2 \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.
On montre ainsi que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$
On a donc, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$
L'intégrale étant convergente, on en déduit que

$$\underset{x\to+\infty}{lim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice
Extrait de CCINP PC 2013 maths 2

Un corrigé de M. Masselin

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour $t > 0$, $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$.
f est un quotient de fonctions continues sur $]0; +\infty[$ donc f est continue sur cet intervalle.
Par limite usuelle, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et par conséquent intégrable sur $]0; 1]$.
Pour tout $t > 0$, $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ donc $0 \leq f(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$. $2 > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ et, par comparaison, f est intégrable sur $[1; +\infty[$.
On peut alors conclure que f est intégrable sur $]0; +\infty[$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose :
   - La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I.
   - Il existe une fonction φ continue par morceaux, intégrable et à valeurs positives sur I telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I, f est intégrable sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : t \mapsto f(t^n)$.
$t \mapsto t^n$ est continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc, par composition u_n est continue sur $[0;1]$; a fortiori, elle y est continue par morceaux.
Si $t \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = f(0)$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1) = f(1)$.
(u_n) converge donc simplement sur $[0;1]$ vers la fonction u égale à $f(0)$ sur $[0;1[$ et à $f(1)$ en 1 ; u est continue par morceaux sur $[0;1]$.
f est continue sur le segment $[0;1]$ donc bornée : il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, $|f(x)| \leq M$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0;1]$, $|u_n(t)| \leq M$ où $t \mapsto M$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0;1]$.
D'après le théorème de convergence dominée, (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(0)du$:
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = f(0)$$

(b) Pour $n > 0$, on effectue le changement de variable $u = t^n$ dans I_n ($t \mapsto t^n$ est $\mathcal{C}^1$ de $]0;1]$ dans lui même et sa dérivée ne s'annule pas). On obtient $nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u} u^{1/n} du$.
On pose $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u} u^{1/n}$.
Pour tout n, g_n est continue par morceaux sur $]0;1]$.
(g_n) converge simplement sur $]0;1]$ vers $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in]0;1]$, $|g_n(u)| \leq \dfrac{|f(u)]}{u}$ où, par hypothèse, $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0;1]$.
Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

(c) En utilisant ce qui précède avec la fonction sin (sin est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est intégrable sur $]0;1]$), on obtient
$$\int_0^1 \sin(t^n)dt \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin u}{u} du$$
(on remarque que $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est continue positive, non identiquement nulle sur $]0;1]$ et donc son intégrale n'est pas nulle)

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto f(t^n)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment.
Soit $x > 1$. Dans $\displaystyle\int_1^x f(t^n)dt$, on effectue comme ci-dessus le changement de variable $u = t^n$:
$$\int_1^x f(t^n)dt = \frac{1}{n}\int_1^{x^n} \frac{f(u)}{u} u^{1/n} du$$
Pour $u > 1$, comme $\dfrac{1}{n} \leq 1$, $\left|\dfrac{f(u)}{u} u^{1/n}\right| \leq |f(u)|$ et f est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u} u^{1/n}$ aussi. L'intégrale ci-dessus a donc une limite finie quand x tend vers $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$) ce qui justifie l'existence de A_n.

(b) Une application du théorème de convergence dominée analogue aux précédentes donne
$\lim\limits_{n\to+\infty} nA_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du$.

5. (a) Le changement de variable $u = t^n$ donne $C_n(A) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{A^n} \sin(u) u^{1/n-1} du$. On effectue une intégration par partie en posant $\varphi'(u) = \sin u$, $\psi(u) = u^{1/n-1}$, $\varphi(u) = 1 - \cos u$, $\psi'(u) = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right) u^{1/n-2}$ (φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1; A^n]$) :

$$C_n(A) = \frac{1-\cos(A^n)}{nA^{n-1}} - \frac{1-\cos(1)}{n} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2} u^{1/n} du$$

(b) $0 \leq \dfrac{1-\cos(A^n)}{A^{n-1}} \leq \dfrac{2}{A^{n-1}}$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1-\cos(A^n)}{A^{n-1}} = 0$.

Pour $u \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1-\cos u}{u^2} u^{1/n} \leq \dfrac{2}{u^{2-1/n}}$. Quand $n \geq 2$, $2 - \dfrac{1}{n} > 1$ donc $u \mapsto \dfrac{1-\cos u}{u^2} u^{1/n}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ ce qui démontre que $\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2} u^{1/n} du$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit que $C_n(A)$ a une limite finie quand n tend vers l'infini.

(c) En faisant tendre A vers l'infini dans la question précédente, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \sin(t^n) dt = -\frac{1-\cos(1)}{n} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} u^{1/n} du$$

Une nouvelle application du théorème de convergence dominée (en remarquant que, pour $u \geq 1$ et $n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{1-\cos u}{u^2} u^{1/n} \leq \dfrac{2}{u^{3/2}}$) donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} \sin(t^n) dt = 1 - \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$.

(on aurait pu aussi utiliser la question II-3 avec $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ en refaisant le changement de variable $u = t^n$).

(d) Avec la relation de Chasles et les résultats qui précèdent,
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + 1 - \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} dt$. Il reste alors à faire une intégration par parties dans la première intégrale pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt = K = \frac{\pi}{2}$$