Devoir non surveillé 12

À rendre le mardi 5 décembre (facultatif)

Problème

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q1. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q2. Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q3. 1re tentative Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $f_n(x)=(-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q4. 2e tentative Pour tout $x\in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q5. En déduire que :

$$I(\alpha)+J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(\alpha x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right).$$

Q6. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\mathrm{d}t$$

Q7. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q8. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q9. Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q10. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

Q11. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Exercice

1. Justifier l'existence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$. On admet que $K = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.
3. (a) On considère ici une application continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

   (b) On suppose ici de plus que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
   On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.

   (c) **Application 1.**
   Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)dt$ (grâce à une intégrale).
4. On considère mainstenant que $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de $A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)dt$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).
5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et tout $A > 1$, on pose $C_n(A) = \displaystyle\int_1^A \sin(t^n)dt$.
   Grâce à un changement de variable et une intégration par parties, exprimer $C_n(A)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{\frac{1}{n}}du$ et de A.

   (b) En déduire que $C_n(A)$ a une limite quand $A \to +\infty$, prouvant l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)dt$ pout tout entier naturel $n \geqslant 2$.

   (c) **Application 2.**
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)dt$ grâce à l'intégrale K.