Devoir non surveillé 1 - Correction

Problème

I - Réduction

1. La première et la dernière colonne de T sont indentiques donc $\det(T) = \det(f) = 0$ et
$$\boxed{f \text{ n'est pas bijectif.}}$$
2. Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi_f(\lambda) = \chi_T(\lambda) = (-1)^3 \det(T - \lambda I_3) = \lambda(\lambda-1)^2$. Donc :
$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\} \text{ avec } m_0 = 1 \text{ et } m_1 = 2.}$$
3. Le calcul donne (soigner la rédaction, et en fonction du raisonnement choisi ne pas oublier de préciser l'argument de dimension) :
$$\boxed{E_0(f) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } E_1(f) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$$
4. On a $\dim(E_1(f)) = 1 < 2 = m_1$ donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
5. On cherche une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = u_2 + u_3$.
Prenons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à trouver $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et à vérifier qu'on obtient bien une base de E.
On a les équivalences suivantes.
$$f(u_3) = u_2 + u_3 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x + y + z &=& 1 + x \\ y &=& 0 + y \\ y &=& 0 + z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& z \\ 2z &=& 1 \end{array}\right.$$
Prenons par exemple $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.
On vérifie que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$ et donc $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est bien une base de E telle que $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = u_2 + u_3$ i.e. dans laquelle la matrice de f est :
$$R = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}TP$$
avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

II - Commutant

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}\mathrm{om}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Tout d'abord $\mathcal{C}\mathrm{om}(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathcal{C}\mathrm{om}(A)$.
   Soient $M, N \in \mathcal{C}\mathrm{om}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a don $AM = MA$ et $AN = NA$ et :
   $$(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = A(\lambda M + \mu N).$$
   Ainsi $\lambda MA + \mu NA \in \mathcal{C}\mathrm{om}(A)$.
   Finalement $\boxed{\mathcal{C}\mathrm{om}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a : $RM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $MR = \begin{pmatrix} 0 & b & b+c \\ 0 & e & e+f \\ 0 & h & h+i \end{pmatrix}$.
   Et donc en identifiant les coefficients, on obtient après quelques calculs :
   $$RM = MR \iff b = c = d = g = h = 0 \text{ et } e = i.$$
   $$\text{Ainsi, } \mathcal{C}\mathrm{om}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},\ a, e, f \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=U}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=V}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=W} \right\}.$$
   Les trois matrices U, V, W sont clairement indépendantes et donc $\boxed{\dim(\mathcal{C}\mathrm{om}(R)) = 3.}$
3. On a les équivalences suivantes.
   $$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}\mathrm{om}(T) &\iff MT = TM \\ &\iff MPRP^{-1} = PRP^{-1}M \\ &\iff P^{-1}MPR = RP^{-1}MP \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}\mathrm{om}(R) \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ P^{-1}MP = \alpha U + \beta V + \gamma W \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ M = \alpha PUP^{-1} + \beta PVP^{-1} + \gamma PWP^{-1} \\ &\iff M \in \mathrm{Vect}\{PUP^{-1}, PVP^{-1}, PWP^{-1}\} \end{aligned}$$
   Ainsi $\mathcal{C}\mathrm{om}(T) = \mathrm{Vect}\{PUP^{-1}, PVP^{-1}, PWP^{-1}\}$.
   On peut montrer que la famille $(PUP^{-1}, PVP^{-1}, PWP^{-1})$ est libre en revenant à la définition de famille libre ou en précisant qu'elle est l'image de (U, V, W) qui est libre par l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ qui est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Et finalement $\boxed{\dim(\mathcal{C}\mathrm{om}(T)) = 3.}$
4. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_T(X) = X(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de T et il est bien de degré 3.
5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2.
   (a) D'après le cours, si P est un polynôme annulateur de T alors les valeurs propres 0 et 1 de T sont racines de P. Ainsi, le polynôme $X(X-1)$ divise P.
   Or $\deg(T) \leq 2$, donc :
   $$\boxed{\text{si } P \text{ est un polynôme annulateur de } T \text{ alors il existe } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tel que } P(X) = \alpha X(X-1).}$$
   (b) Si on avait $\alpha \neq 0$, $X(X-1)$ serait un polynôme scindé à racines simples annulateur de T et donc T serait diagonalisable. Ce qui n'est pas le cas ! Ainsi $\alpha = 0$ et donc $\boxed{P = 0.}$

6. • On vérifie que $\{I_3, T, T^2\}$ est libre : en effet si a, b, c sont des réels tels que $aT^2 + bT + cI_3 = 0$, alors le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ est un polynôme annulateur de T, comme il est de degré inférieur ou égal à 2, d'après la question précédente, il est nul. Donc $a = b = c = 0$ et la famille $\{I_3, T, T^2\}$ est libre.
   • Puisque T commute avec I_3, T et T^2, ce sont trois éléments de $\mathcal{C}\text{om}(T)$.
   • Enfin, $\text{card}(\{I_3, T, T^2\}) = 3 = \dim(\mathcal{C}\text{om}(T))$.
   On peut donc en conclure que $\{I_3, T, T^2\}$ est une base de $\mathcal{C}\text{om}(T)$ et donc que :

$$\boxed{\mathcal{C}\text{om}(T) = \text{Vect}\{I_3, T, T^2\}.}$$

III - Racines carrées

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Si $M^2 = R$ alors $MR = M.M^2 = M^3 = M^2.M = RM$.
   Et donc, $M \in \mathcal{C}\text{om}(R)$ et d'après la question II.2, on a bien :

$$\boxed{\text{Si } M^2 = R \text{ alors il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.}$$

   (b) D'après la question précédente, il suffit de chercher les matrices M sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   Le calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$.

   Et donc :

$$\begin{aligned}
M^2 = R \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \\ 2bc = 1 \end{cases} \\
&\iff \quad a = 0 \text{ et } \begin{cases} b = 1 \quad \text{et} \quad c = 1/2 \\ \text{ou} \\ b = -1 \quad \text{et} \quad c = -1/2 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi, il existe exactement deux matrices M telles que $M^2 = R$, il s'agit de :

$$\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -M_1}$$

2. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} N^2 = T &\iff N^2 = PRP^{-1} \\ &\iff P^{-1}N^2P = R \\ &\iff P^{-1}NPP^{-1}NP = (P^{-1}NP)^2 = R \\ &\iff P^{-1}NP = M_1 \text{ ou } P^{-1}NP = M_2 \\ &\iff N = PM_1P^{-1} \text{ ou } N = PM_2P^{-1} \end{aligned}$$

Et donc, il existe exactement deux matrices N telles que $N^2 = T$, ce sont :

$$\boxed{PM_1P^{-1} \text{ et } PM_2P^{-1} = -PM_1P^{-1}.}$$

3. On exprime à présent les « racines carrées » de T en fonction de I_3, T, T^2.

Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = T$.

(a) On a clairement $NT = N^3 = TN$ et donc $N \in \mathcal{C}\text{om}(T) = \text{Vect}\{I_3, T, T^2\}$. Ainsi, par la question II.6 :

$$\boxed{\text{Il existe } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ tels que } N = xI_3 + yT + zT^2.}$$

(b) On le démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, c'est vrai avec $\alpha_1 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat démontré pour ce n.

Le calcul de $T^{n+1} = T \times T^n$ donne : $T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2+\alpha_n & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ avec $\alpha_{n+1} = 2 + \alpha_n$.
Par le principe de récurrence, on a bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_n & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Et puisque $\alpha_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_{n+1} = 2 + \alpha_n$ (suite arithmétique), on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = 2n - 1.}$$

(c) On développe $N^2 = (xI_3 + yT + zT^2)^2$. Toutes les matrices commutent deux-à-deux.

$$N^2 = x^2I_3 + 2xyT + (y^2 + 2xz)T^2 + 2yzT^3 + z^2T^4 = T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_n & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & 0 \\ \alpha_1 2xy + \alpha_2(y^2 + 2xz) + \alpha_3 2yz + \alpha_4 z^2 & = & 1 \\ 2xy + y^2 + 2xz + z^2 + 2yz & = & 1 \end{array} \right.$$

On a donc bien $\boxed{x = 0.}$
Et la dernière égalité donne $\boxed{(y+z)^2 = 1}$ soit $y + z = \pm 1$.
On reporte dans la seconde égalité qui avec $x = 0$ s'écrit : $\boxed{3y^2 + 7z^2 + 10yz = 1.}$
- Si $y = 1 - z$ alors $3(1-z)^2 + 7z^2 + 10(1-z)z = 1$ donne (les z^2 s'éliminent) $z = -1/2$ et donc $y = 3/2$.
- Si $y = -1 - z$ alors $3(-1-z)^2 + 7z^2 + 10(-1-z)z = 1$ donne (les z^2 s'éliminent) $z = 1/2$ et donc $y = -3/2$.

(d) On trouve donc que les deux solutions de l'équation $N^2 = T$ sont : $\boxed{\frac{3}{2}T - \frac{1}{2}T^2 \text{ et } -\frac{3}{2}T + \frac{1}{2}T^2.}$

Après calcul on trouve $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

IV - En dimension supérieure

1. On a $H = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
2. On a $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\{h(e_1), \ldots, h(e_{2n+1})\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_1 + \cdots + e_{2n+1}\}$ et donc $\mathrm{rg}(h) = 2$.
   De plus, si $x = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in E$, on a :
   $$x \in \mathrm{Ker}(h) \iff H \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = 0 \iff x_{n+1} = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n+1} = 0.$$
3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(h) \cap \mathrm{Im}(h)$.
   • D'une part, $x \in \mathrm{Im}(h)$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha e_1 + \beta(e_1 + \cdots + e_{2n+1}) = (\alpha + \beta, \beta, \ldots, \beta)$.
   • D'autre part, $x \in \mathrm{Ker}(h)$ donc : $\beta = 0$ et $\alpha + \beta + \beta + \cdots + \beta = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$.
   Et finalement $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(h) \cap \mathrm{Im}(h) = \{0\}$.
   Et par la formule dur rang, $\dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(E)$.
   On peut donc conclure que : $\boxed{E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h).}$
4. On se donne une base $(u_1, \ldots, u_{2n-1})$ de $\mathrm{Ker}(h)$ et on note $u_{2n} = e_1$ et $u_{2n+1} = e_1 + \cdots + e_{2n+1}$. De sorte que (u_{2n}, u_{2n+1}) est une base de $\mathrm{Im}(h)$.
   Puisque $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$, la famille concaténée $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_{2n-1}, u_{2n}, u_{2n+1})$ est une base de E.
   Enfin, $h(u_{2n})$ et $h(u_{2n+1})$ sont des éléments de $\mathrm{Im}(h)$ donc ils s'écrivent comme combinaison linéaire de u_{2n} et u_{2n+1}.
   Par conséquent, la matrice h dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrit : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{pmatrix}$ où $\tilde{H}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. On remarque que $\tilde{H}$ est la matrice de l'endomorphisme $\tilde{h}$ induit par h sur $\mathrm{Im}(h)$, dans la base (u_{2n}, u_{2n+1}).
   Si elle n'était pas inversible, elle aurait 0 pour valeur propre. Et donc il existerait $u \in \mathrm{Im}(h)$ non nul tel que $\tilde{h}(u) = h(u) = 0$.
   On aurait donc un vecteur u non nul dans $\mathrm{Ker}(h) \cap \mathrm{Im}(h)$ ce qui est impossible (cf IV.3).
   Donc $\boxed{\tilde{H} \text{ est inversible.}}$
6. Le calcul donne $h(u_{2n}) = h(e_1) = e_1 = u_{2n}$ et $h(u_{2n+1}) = 2nu_{2n} + u_{2n+1}$. On a donc :
   $$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Si h était diagonalisable, ses endomorphismes induits le seraient aussi (cours) et donc $\tilde{h}$ serait diagonalisable, et $\tilde{H}$ aussi. Mais $\tilde{H}$ n'a qu'une seule valeur propre 1, et donc si elle était diagonalisable, elle serait semblable à I_2. C'est impossible puique que pour toute matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on a :
   $$Q^{-1} I_2 Q = I_2 \neq \tilde{H}.$$
   Donc finalement, $\boxed{\text{L'endomorphisme } h \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Exercice 1

1. Étude de convergences.

   (a) $\boxed{\text{Pour tout } x > 0}$ la suite $\left(\dfrac{1}{n+x^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0.

   Donc par le théorème des séries alternées, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \text{ converge.}}$

   C'est la définition de $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$

   (b) Pour tout $x > 0$, puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge, on peut définir :

   $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x^2}.$$

   Par le théorème des séries alternées, on a :

   $$\boxed{\forall x > 0}, \; R_n(x) \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

   Ainsi, $\dfrac{1}{n+1}$ est un majorant de R_n sur $]0,+\infty[$. Par définition de borne supérieure, on a donc :

   $$\|R_n\|_{\infty,]0,+\infty[} \leq \frac{1}{n+1}.$$

   Par le théorème d'encadrement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = 0$.

   C'est la définition de $\boxed{\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur }]0,+\infty[.}$

   (c) La fonction $|f_n| : x \longmapsto \dfrac{1}{n+x^2}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ de limite nulle en $+\infty$. De plus, puisque ici $n \geq 1$, $|f_n|$ admet une limite finie en 0 : $\dfrac{1}{n}$.

   Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée et $\|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = \dfrac{1}{n}$.

   Or $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, donc :

   $$\boxed{\sum_{n\geq 1} f_n \text{ ne converge pas normalement sur }]0,+\infty[.}$$

2. (a) Par le théorème des séries alternées (hypothèses vérifiées et question 1), la somme $f(x)$ est du signe de son premier terme $f_1(x) = \dfrac{(-1)^1}{1+x^2} \leq 0$.

   $$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) \leq 0.}$$

   (b) La différence entre f et g est le premier terme de la somme.

   $$\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) = f_0(x) + f(x) = \frac{1}{x^2} + f(x).}$$

(c) On a vu en question 1(b) que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$. Donc :

$$\boxed{\text{La somme que } f=\sum_{n\geq 1} f_n \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

Puisque f_0 est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction $g=f_0+h$ l'est aussi.

(d) On applique le théorème de double limite à $\sum_{n\geq 1} f_n$.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, (puisque $n\geq 1$) on a $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}=b_n$.
- $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]0,\underline{+\infty}[$.

Par le théorème de double limite, on en déduit :

- $\sum_{n\geq 1} b_n=\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge,
- f admet une limite finie en 0^+.
- Enfin :
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Et par l'énoncé, on a : $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=-\ln(2).}$

(e) On a donc $f(x)=-\ln(2)+\underset{x\to 0^+}{o}(1)$.
Et par suite :

$$\boxed{g(x)=f_0(x)+f(x)=\frac{1}{x^2}-\ln(2)+\underset{x\to 0^+}{o}(1).}$$

(f) On applique le théorème de double limite à $\sum_{n\geq 1} f_n$.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, (puisque $n\geq 1$) on a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.
- $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]\underline{0},+\infty[$.

Par le théorème de double limite, on en déduit que f admet une limite finie en $+\infty$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}0=0.$$

Et puisque $g=f_0+f$, il vient $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.}$

(g) On applique le théärème de dérivation terme à terme.

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $f_n'(x)=\dfrac{2x(-1)^{n+1}}{(n+x^2)^2}$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Pour la suite, on donne deux méthodes de longueur et de difficulté similaire.

Méthode 1 : en montrant la convergence uniforme sur tout $[a,b]\subset]0,+\infty[$**.**
Pour tout $x>0$, la suite $\left(\dfrac{2x}{(n+x^2)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0.
Donc par le théorème des séries alternées, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'(x)$ converge et on peut en majorer les restes partiels (on les note encore $R_n(x)$).

$$\forall x\in[a,b],\quad |R_n(x)|\leq\left|\frac{2x(-1)^{n+2}}{(n+1+x^2)^2}\right|=\frac{2x}{(n+1+x^2)^2}\leq\frac{2b}{(n+1)^2}.$$

Par conséquent, $\|R_n\|_{\infty,[a,b]}\leq\dfrac{2b}{(n+1)^2}$.
Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n\|_{\infty,[a,b]}=0$ et donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$.
Par le théorème de dérivation terme à terme, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,b]\subset]0,+\infty[$, elle l'est donc sur $]0,+\infty[$ (propriété locale) et on a :

$$\forall x>0,\qquad f'(x)=2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x^2)^2}.$$

Méthode 2 : en montrant la convergence normale sur tout $[a,b]\subset]0,+\infty[$**.**

$$\forall x>0,\ |f'n(x)|=\frac{2x}{(n+x^2)^2}\leq\frac{2b}{n^2}.$$

Donc, $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]}\leq\dfrac{2b}{n^2}$. Or, par Riemann, $\sum\dfrac{2b}{n^2}$ converge, donc par comparaison, $\sum\|f_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge aussi.
Ainsi $\sum f'n$ converge normalement sur $[a,b]$, a fortiori elle converge uniformément sur $[a,b]$.
La suite est identique à la première méthode.

(h) **Étude de f :** par le thèorème des séries alternées, on montrerait que $f'(x)$ est du signe du premier terme de la somme, c'est-à-dire $f'\geq 0$. Donc f est croissante.
En appliquant le théorème de double limite, on montrerait que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$. Quitte à prolonger f par continuité en 0, le théorème de la limite de la dérivée donne que la tangente au point d'abscisse $x=0$ est horizontale.
Enfin, on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. On a donc le graphe suivant pour f.

Étude de g : On a déjà $g(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$ (Q2(e)) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (Q2(f)).
D'autre part, puisque $g=f_0+f$, on obtient :

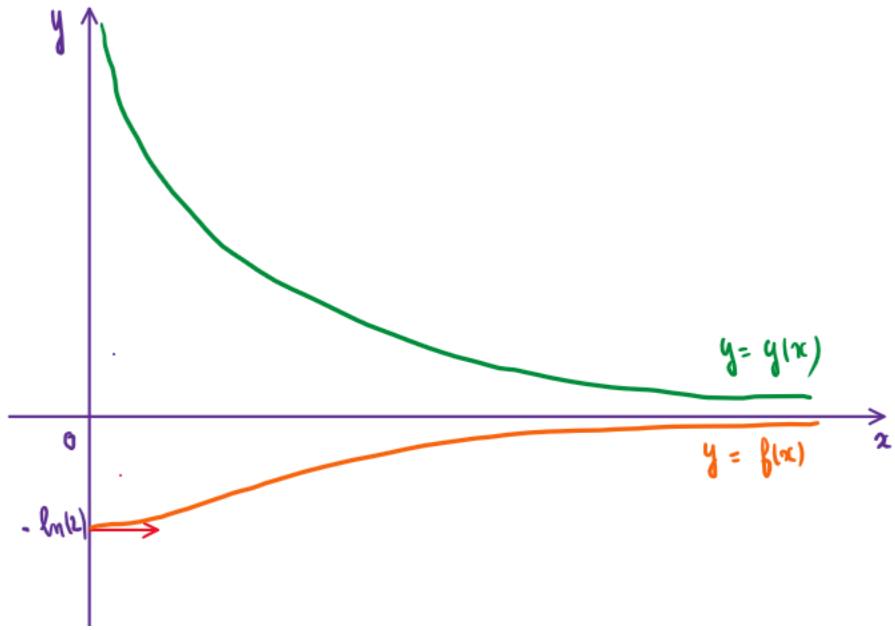
$$\forall x>0,\quad g'(x)=-\frac{2}{x^3}+2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x^2)^2}=2x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x^2)^2}.$$

La encore, on peut utiliser le théorème des séries alternées et obtenir que $g'(x)$ est du signe du premier terme de la somme :

$$\forall x>0,\ g'(x)\leq 0.$$

Ainsi, g est décroissante sur $]0,+\infty[$.

On a donc les graphes suivants pour f et g.



Exercice 2

1. Notons R (resp. J) la matrice dont le coefficient générique est la partie réelle (resp. imaginaire) de celui de P. On a alors $\boxed{P = R + iJ.}$
2. $AP = PB$ devient, avec les notations de la question précédente,
$$AR + iAJ = RB + iJB$$
En identifiant les parties réelle et imaginaire de chaque coefficient, on a donc $AR = RB$ et $AJ = JA$. En combinant ces relations, on obtient
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{C}, \quad A(R + tJ) = AR + tAJ = RB + tJB = (R + tJ)B.}$$
3. L'application $t \in \mathbb{C} \longmapsto R + tJ$ a des fonctions coordonnées qui sont polynomiales et à coefficients réels.
Avec la formule théorique du déterminant (MPSI) ou en raisonnant par récurrence et en développant successivement sur les lignes, on en déduirait que $\phi : t \longmapsto \det(R + tJ)$ est aussi une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ dont les coefficients sont réels.
Ainsi, il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{C},\ Q(t) = \phi(t)$.
Or, $Q(i) = \phi(i) = \det(P) \neq 0$ et Q n'est pas le polynôme nul. Sa fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$ n'est donc pas nulle (un polynome admettant une infinité de racines est nul). On a donc
$$\boxed{\exists\, t_0 \in \mathbb{R}, \quad R + t_0 J \in GL_n(\mathbb{R}).}$$
4. Soit $Q = R + t_0 J$. La question 1.b montre que $AQ = QB$ et, comme Q est inversible,
$$Q^{-1}AQ = B$$
ce qui montre que $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$