Devoir non surveillé 11

À rendre le mardi 28 novembre

Problème 1 (Matrices T)

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

I - Réduction

1. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. Déterminer les valeurs propres de f et préciser leurs multiplicités respectives.
3. Déterminer les sous-espaces propres de f.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est :

$$R = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On précisera la matrice de passage P et la relation liant R, P et T.

II - Commutant

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}\text{om}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $\mathcal{C}\text{om}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathcal{C}\text{om}(R)$ et en donner une base. Que vaut alors $\dim(\mathcal{C}\text{om}(R))$?
3. En déduire la dimension de $\mathcal{C}\text{om}(T)$.
4. Donner un polynôme annulateur de T de degré 3.
5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que si P est un polynôme annulateur de T alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que :

   $$P(X) = \alpha X(X-1).$$

   (b) En déduire que $P = 0$.
6. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{C}\text{om}(T) = \text{Vect}\{I_3, T, T^2\}$.

III - Racines carrées

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $M^2 = R$ alors $MR = RM$.

   En déduire que dans ce cas, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   (b) Démontrer qu'il existe exactement deux matrices M telles que $M^2 = R$, et donner ces deux matrices.
   On note M_1 et M_2 ces deux matrices.

2. Déduire des questions précédentes qu'il existe exactement deux matrices N telles que $N^2 = T$, et exprimer ces deux matrices en fonction de M_1, M_2 et P.
   On ne demande pas d'effectuer les calculs.

3. On exprime à présent les « racines carrées » de T en fonction de I_3, T, T^2.

   Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = T$.

   (a) Démontrer que $NT = TN$. En déduire qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $N = xI_3 + yT + zT^2$.

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_n & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer α_n.

   (c) En déduire que $x = 0$ et que y, z vérifient les égalités suivantes.

$$\begin{cases} (y+z)^2 = 1 \\ 3y^2 + 10yz + 7z^2 = 1 \end{cases}$$

   (d) En déduire les deux solutions de l'équation $N^2 = T$ en fonction de T, T^2, puis avec leurs coefficients.

IV - En dimension supérieure

Dans ce paragraphe, on note $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ où n est un entier naturel non nul et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n+1})$ la base canonique de E.
On note h l'endomorphisme de E défini par :

$$\text{Pour tout } i \in \{1, \dots, 2n+1\}, \quad h(e_i) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad i \neq n+1 \\ \\ e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1} & \text{si} \quad i = n+1 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice $H = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h)$ de l'endomorphisme h dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le rang, le noyau et l'image de h.
3. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$.
4. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de h dans $\mathcal{B}'$ s'écrive par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{pmatrix}$$

   où $\tilde{H}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $\tilde{H}$ est inversible.
6. L'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

Exercice 1 (Très guidé)

On admettra dans cet exercice que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$.

1. Étude de convergences.
   (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   On définit alors $f : x \in]0, +\infty[\longmapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx$ (la somme commence à $n = 1$).

   (b) En utilisant le théorème des séries alternées, démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

   (c) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$?

2. Dans la suite, on étudie la fonction $g : x \in]0, +\infty[\longmapsto g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ (la somme commence à $n = 0$).

   (a) Déterminer le signe de la fonction f.
   (b) Déterminer une relation entre f et g.
   (c) Démontrer que f est continue sur $]0, +\infty[$. En déduire que g l'est aussi.
   (d) Démontrer que f admet une limite en 0^+ et déterminer cette limite.
   (e) En déduire des constantes réelles α et β telles que :

   $$g(x) = \frac{\alpha}{x^2} + \beta + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

   (f) Déterminer aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
   (g) En appliquant le théorème de dérivation terme à terme à la fonction f, démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ sous la forme d'une somme.
   (h) Étudier la monotonie de f et de g sur $]0, +\infty[$ et tracer l'allure de leurs graphes.

Exercice 2 (facultatif)

On se propose de démontrer le résultat suivant :
« deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Soit donc A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un élément de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$A = PBP^{-1}.$$

1. Montrer qu'il existe (R, J) éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $P = R + iJ$ avec $i^2 = -1$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$.
3. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + t_0J) \neq 0$.
4. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.