Devoir non surveillé 0

Travail de Recherche - Correction

Problème 1
Algèbre linéaire et probabilités

1. Le calcul donne facilement $MC_1 = C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On note $E_{1/2}(M)$ le sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par : $E_{1/2}(M) = \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I_3\right)$.

   (a) On a $M - \dfrac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Et donc :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/2}(M) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y & = & 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y & = & 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & -2x \end{array} \right.$$

$$\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Et donc $\boxed{E_{1/2}(M) = \operatorname{Vect}\{C_2\} \text{ avec } C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.}$

   (b) On peut faire le calcul ou remarquer que $C_2 \in E_{1/2}(M)$ donc $\left(M - \dfrac{1}{2}I_3\right) C_2 = 0$.

   En développant : $\boxed{MC_2 = \dfrac{1}{2}C_2.}$

3. On note $E_{-1/2}(M)$ le sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par : $E_{-1/2}(M) = \operatorname{Ker}\left(M + \frac{1}{2}I_3\right)$.

   (a) On a $M + \dfrac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Et donc :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1/2}(M) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y & = & 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y & = & 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & 0 \end{array} \right. \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Et donc $\boxed{E_{-1/2}(M) = \operatorname{Vect}\{C_3\} \text{ avec } C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

(b) On peut faire le calcul ou remarquer que $C_3 \in E_{-1/2}(M)$ donc $\left(M + \dfrac{1}{2}I_3\right) C_3 = 0$.

En développant : $\boxed{MC_3 = -\dfrac{1}{2}C_3.}$

4. On a $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En développant selon C_1, le calcul donne $\det(P) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc $\boxed{P \text{ est inversible.}}$

5. On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M c'est-à-dire :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & y = \left(\dfrac{1}{2}x_2,\ \dfrac{1}{2}x_1,\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + x_3\right) \end{array} \right.$$

(a) La base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$ et en particulier, pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \in E$, on a :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

(b) Deux façons de voir les choses... (mais la première est la réponse à la question suivante)

- On a pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M.\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$$

Donc la matrice de u dans la base canonique est $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = M.}$

- Ou bien, on sait que les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ sont les coordonnées de $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Le calcul donne :
$$\begin{array}{rcccl} u(e_1) & = & \left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ u(e_2) & = & \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 \\ u(e_3) & = & (0,\ 0,\ 1) & = & e_3 \end{array}$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 \end{array}$ On retrouve que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = M$.

(c) On note $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$. Si $y = u(x)$, on a $\boxed{Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) = MX.}$

6. Soit $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ la base de E telle que P soit la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,

(a) Par définition, les colonnes de P sont les coordonnées de e_1', e_2' et e_3' dans la base $\mathcal{B}$ et donc :

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e_1') = C_1 \text{ donc } e_1' = e_3, \\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e_2') = C_2 \text{ donc } e_2' = \dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{1}{2}e_2 - e_3, \\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e_3') = C_3 \text{ donc } e_3' = e_1 - e_2. \end{array}$$

(b) Les questions 1, 2 et 3 donnent $MC_1 = C_1$, $MC_2 = \frac{1}{2}C_2$ et $MC_3 = -\frac{1}{2}C_3$, ce qui s'écrit (en utilisant 5(c)) :

$$\boxed{u(e'_1) = e'_1, \quad u(e'_2) = \frac{1}{2}e'_2, \quad u(e'_3) = -\frac{1}{2}e'_3}$$

(c) Par définition, on a :

$$\boxed{M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{array}{c} u(e'_1)u(e'_2)u(e'_3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_2 \end{array}}$$

7. Le cours donne $\boxed{M' = P^{-1}MP.}$
8. On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Pour $n = 0$, c'est immédiat car $M^0 = (M')^0 = I_3$ et $PP^{-1} = I_3$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $M^n = P(M')^n P^{-1}$.
On sait que $M' = P^{-1}MP$ donc $M = PM'P^{-1}$ et par associativité du produit matriciel :

$$M^{n+1} = M^n M = (P(M')^n P^{-1})(PM'P^{-1}) = P(M')^n I_3 M' P^{-1} = P(M')^{n+1} P^{-1},$$

ce qu'on voulait démontrer.

• **Conclusion :** par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P(M')^n P^{-1}.}$$

• **Remarque :** On peut aussi écrire plus simplement :

$$\begin{aligned} M^n &= (PM'P^{-1})^n = \underbrace{(PM'P^{-1})(PM'P^{-1}) \times \cdots \times (PM'P^{-1})}_{n \text{ fois}} \\ &= PM' \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_3} M'P^{-1} \times \cdots \times PM'P^{-1} = P(M')^n P^{-1}. \end{aligned}$$

9. Puisque M' est diagonale, on a $(M')^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.
10. On calcule P^{-1} soit par opérations sur les lignes (resp. sur les colonnes) appliquées à P et à I_3, soit en résolvant le système :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, on obtient : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.}$

11. D'après les deux questions précédentes, on a :

$$M^n = P(M')^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1+(-1)^n\Big) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1-(-1)^n\Big) & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1-(-1)^n\Big) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1+(-1)^n\Big) & 0 \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 \end{pmatrix}.}$$

II - Un peu de probabilité.

1. On donne l'énoncé de première année.

Formule des probabilités totales

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ un **système complet d'évènements** de Ω. Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{p} P_{A_i}(B)P(A_i),$$

avec la convention $P_{A_i}(B)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. Et donc, par la formule des probabilités totales, on a les trois égalités suivantes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(A_{n+1}) & = & P(A_{n+1}\cap A_n) + P(A_{n+1}\cap B_n) + P(A_{n+1}\cap C_n) \\ P(B_{n+1}) & = & P(B_{n+1}\cap A_n) + P(B_{n+1}\cap B_n) + P(B_{n+1}\cap C_n) \\ P(C_{n+1}) & = & P(C_{n+1}\cap A_n) + P(C_{n+1}\cap B_n) + P(C_{n+1}\cap C_n) \end{array}\right.$$

Avec la convention de la proposition, on a aussi :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(A_{n+1}) & = & P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ P(B_{n+1}) & = & P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ P(C_{n+1}) & = & P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \end{array}\right.$$

Et le graphe de l'énoncé s'écrit lorsque $P(A_n), P(B_n), P(C_n)$ ne sont pas nuls :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0, \quad P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}, \quad P_{C_n}(A_{n+1}) = 0.$$

La première égalité donne $\boxed{(1) : a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n.}$

Et de la même manière, on obtiendrait : $\boxed{(2) : b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n}$ et $\boxed{(3) : c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n}$

2. Par la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \end{array}\right.$

   Ce qui s'écrit matriciellement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} X_n = MX_n.}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = MX_{n-1} = M^2X_{n-2} = \cdots = M^nX_0$.
   Remarque : en épreuve, quand la question est ainsi explicitement posée avec la réponse donnée, il est conseillé d'écrire soigneusement la récurrence.

4. Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, avec les résultats précédents, le calcul donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1+(-1)^n\Big) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1-(-1)^n\Big) & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1-(-1)^n\Big) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(1+(-1)^n\Big) & 0 \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(u_0(1+(-1)^n)+v_0(1-(-1)^n)\Big) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(u_0(1-(-1)^n)+v_0(1+(-1)^n)\Big) \\ 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u_0+v_0) \end{pmatrix}$$

car $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

5. Puisque $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, on retrouve :

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(u_0(1+(-1)^n)+v_0(1-(-1)^n)\Big) \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big(u_0(1-(-1)^n)+v_0(1+(-1)^n)\Big) \\ c_n &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0+v_0) \end{aligned}}$$

et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1.}$

Problème 2
Étude de suites et de séries

Toutes les parties de ce problème sont indépendantes.

I - Quelques idées reçues

1. « Une suite à valeurs réelles est soit croissante, soit décroissante. ».
   C'est **Faux** !
   Par exemple, en posant $u_n = (-1)^n$, on a $u_0 = 1 > u_1 = -1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante. De même, $u_1 = -1 < u_2 = 1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.
   Il existe donc des suites (à valeurs réelles) qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.
2. « Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ ».
   C'est **Vrai** !
   En effet, on écrit la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2} < 1$.

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N_0 \implies |u_n| \leq \frac{1}{2}.$$

Et donc pour tout entier $n \geq N_0$, on a $|u_n^n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, par le théorème d'encadrement, on obtient bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0.}$$

3. « Si $|u_n| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ ».
   C'est **Faux** !
   Il suffit de choisir $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors $|u_n| < 1$ et pourtant :
   $$|u_n^n| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \neq 0.$$
4. « Si $u_n > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = +\infty$ ».
   C'est **Faux** !
   Il suffit de choisir $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Alors $|u_n| > 1$ et pourtant :
   $$|u_n^n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{1} \neq +\infty.$$
5. « Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ ».
   C'est **Vrai** !
   En effet, si l'on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors on a aussi $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ et par opération sur les limites :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0.}$$
6. « Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ».
   C'est **Faux** !
   En effet, prenons par exemple $u_n = \ln(n)$.
   On a bien $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pourtant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement divergente.
7. « Si u_n ne s'annule pas alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$ ».
   C'est **Faux** !
   En effet, prenons par exemple $u_n = 2^n$.
   Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ ne tend pas vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
   En prenant $u_n = 2^{n^2}$ on obtient même que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{2n+1}$ tend vers $+\infty$!
8. « Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ».
   C'est **Vrai** ! (raisonnement à bien connaître)
   On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On revient à la définition de série convergente.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$.
   Il s'agit d'une somme télescopique. Il reste $S_n = u_{n+1} - u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - u_0$.
   Et donc, par définition $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

II - Suites adjacentes

Dans cette partie, on se donne un réel $p \geq 1$. On définit deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, v_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{pu_n + v_n}{p+1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{pv_n + u_n}{p+1}.$$

1. On a facilement $u_1 = \dfrac{p}{p+1}$ et $v_1 = \dfrac{1}{p+1}$.
2. Une solution :

```python
def suite(n,p) :
    u=1
    v=0
    for i in range(n) : # n iterations, et aucune si n=0
        X=u
        u=(p*X+v)/(p+1)
        v=(p*v+X)/(p+1)
    return [u,v]
```

Une autre solution (en utilisant la double affectation) :

```python
def suite(n,p) :
    u,v=1,0 # double affectation
    for i in range(n) : # n iterations, et aucune si n=0
        u,v=(p*u+v)/(p+1),(p*v+u)/(p+1) # double affectation
    return [u,v]
```

3. Le calcul donne $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{p-1}{p+1}(u_n - v_n)$.

On reconnaît une suite géométrique et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - v_n = \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^n (u_0 - v_0) = \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^n.}$$

4. Tout d'abord, d'après la question précédente, et puisque $p \geq 1$, on a $u_n - v_n \geq 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{p+1}(pu_n + v_n - (p+1)u_n) = \dfrac{1}{p+1}(v_n - u_n) \leq 0$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{p+1}(pv_n + u_n - (p+1)v_n) = \dfrac{1}{p+1}(u_n - v_n) \geq 0$.
Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• Enfin, on a montré dans la question précédente que $u_n - v_n = \left(\dfrac{p-1}{p+1}\right)^n$.
Puisque $p \geq 1$, on a : $0 \leq p-1 < p+1$ et comme $p+1 > 0$, on obtient :

$$0 \leq \frac{p-1}{p+1} < 1.$$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{p-1}{p+1}\right)^n = 0$.

Conclusion : On a bien démontré que $\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$

5. D'après le cours, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et elles convergent vers une même limite que l'on note ℓ.

   Or, on trouve facilement $u_{n+1}+v_{n+1}=u_n+v_n$ donc par une récurrence simple :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n+v_n=u_0+v_0=1.$$

   Et par opération sur les limites, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\ell+\ell=2\ell=1$. Donc

$$\boxed{\ell=\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}.}$$

III - Une suite définie par une intégrale

1. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ d'ailleurs !).

   - En PCSI : l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ existe si f est continue sur $[a,b]$.
   - En MPSI et PSI : l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ existe si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $t\longmapsto\sin^n(t)$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$, donc l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)dt$ est bien définie.

3. On a $I_0=\displaystyle\int_0^{\pi/2}1dx=\frac{\pi}{2}$ et $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(x)\,dx=\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi/2}=1$.
   Enfin, $I_2=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\text{On a } I_0=\frac{\pi}{2},\ I_1=1 \text{ et } I_2=\frac{\pi}{4}.}$$

4. L'application $x\mapsto\sin^n(x)$ est une fonction **positive** sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc par positivité de l'intégrale, on a

$$I_n\geq 0.$$

   De plus, puisque cette application est **continue, positive** sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, si on avait $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx=0$, on aurait pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n(x)=0$, ce qui n'est évidemment pas le cas. Donc $I_n\neq 0$.

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est une suite de réels strictement positifs.}}$$

5. Soit $n\geq 1$, on a

$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,.\sin^n(x)\,dx$$

   On effectue une intégration par parties dans cette intégrale, on a

$$\begin{array}{ll} u(x)=\sin^n(x) & u'(x)=n\cos(x)\sin^{n-1}(x)\\ v(x)=-\cos(x) & v'(x)=\sin(x)\end{array}$$

Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a alors

$$I_{n+1} = \Big[-\cos(x)\sin^n(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^{n-1}(x)\,dx$$

Le crochet est nul, il reste :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt = \frac{1}{n}I_{n+1}.}$$

6. En remarquant aussi que $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(t)\right)\sin^{n-1}(t)\,dt \\ &= nI_{n-1} - nI_{n+1} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}.}$

7. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = nI_{n-1}I_n$.
• Soit n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$a_{n+1} = (n+1)\,I_n.I_{n+1} = (n+1)\,I_n.\frac{n}{n+1}I_{n-1} = nI_{n-1}I_n = a_n$$

On en déduit que $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite constante.}}$
• Soit $n \geq 1$, on a donc $a_n = a_1 = I_0.I_1 = \frac{\pi}{2}.1 = \frac{\pi}{2}$.
On a donc $nI_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2}$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}.}$$

8. Soit $n \geq 1$, on a pour x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $\sin^n(x) \leq \sin^{n-1}(x)$ et la positivité de l'intégrale nous permet de conclure que $I_n \leq I_{n-1}$. Via un changement d'indice, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}.}$$

9. Soit $n \geq 1$, en divisant l'inégalité précédente par $\boxed{I_{n-1} > 0}$, on obtient :

$$\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on a par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$, i.e. $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}.}$
Remarque : Dans le cas général, on n'a pas toutjours $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n-1}$!!!
Voir pour cela la partie I.

10. Soit $n \geq 1$, on a $I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}$ et comme $I_n \geq 0$, on peut donc conclure :

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

11. D'après la question III.6 (avec $n = 2p-1$), on a

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)\times\cdots\times 1}{(2p)\times\cdots\times 2} I_0 \\ &= \frac{(2p)\times(2p-1)\times(2p-2)\times\cdots\times 2\times 1}{\Big((2p)\times\cdots\times 2\Big)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{\Big(2^p p!\Big)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2}.}$

De même, on a

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times\cdots\times 3} I_1 \\ &= \frac{\Big((2p)\times\cdots\times 2\Big)^2}{(2p+1)\times(2p)\times(2p-1)\times\cdots\times 2\times 1} = \frac{\Big(2^p p!\Big)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$

12. On a vu que $I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{2n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. Or on a :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\times\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\times\frac{2}{\pi} = \frac{(2^n.n!)^4}{((2n)!)^2}\frac{2}{(2n+1)}\frac{1}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 1.$$

Puisque $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} = \pi.}$

IV - Une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.

1.

Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a alors :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et dans ce cas elle est convergente,
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et dans ce cas on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
On considère la propriété $\mathcal{P}_n$: u_n existe bien et $u_n > 0$.

• Pour $n = 0$: Puisque $u_0 = 1$ est donné par l'énoncé, l'hypothèse $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Ainsi, u_n existe et $u_n > 0$. A fortiori $u_n^2 + u_n > 0$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+u_n}$ existe bien et $u_{n+1} > 0$.

• **Conclusion :** Par le principe de récurrence, on a démontré :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n \text{ existe bien et que } u_n > 0.}$$

3. Puisque $u_n > 0$, on a $u_n^2 + u_n > u_n^2$, et par croissance de la fonction racine, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geq \sqrt{u_n^2} = |u_n| \underset{u_n \geq 0}{=} u_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

4. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on a $\ell \geq 0$. Or en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$, par continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 + x}$ en $\ell \geq 0$, on obtient :

$$\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell}.$$

Et donc $\ell^2 = \ell^2 + \ell$ ou encore $\boxed{\ell = 0.}$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'elle converge.
D'après ce qui précède, on a forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$. Puisque $u_0 = 1$ et puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on a $u_n \geq 1$. Et par passage à la limite $\ell \geq 1$, d'où la contradiction.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

   (a) Il s'agit d'une somme télescopique. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0}\right) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{u_{N+1}} - \frac{1}{u_N}\right) = \frac{1}{u_{N+1}} - \frac{1}{u_0}$$

   Et donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_{N+1}} - \frac{1}{u_0} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{u_0}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) donc, par définition :

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) \text{ converge.}}$$

   (b) On sait que :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + u_n}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n}\left(\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{-1/2} - 1\right) \end{aligned}.$$

   Or $(1+x)^{-1/2} - 1 = 1 - \dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x) - 1 = -\dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{2}$.
   En substituant $x = \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient : $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2u_n^2}.}$

On a $v_n \leq 0$ (car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante) et aussi $-\dfrac{1}{2u_n^2} \leq 0$. Quitte à tout multiplier par -1, on peut appliquer les théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.
On sait que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2u_n^2}$ et que $\sum v_n$ converge, donc par comparaison, la série $\sum -\dfrac{1}{2u_n^2}$ converge.

$$\boxed{\sum \frac{1}{u_n^2} \text{ converge.}}$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

   (a) Il s'agit encore d'une somme télescopique. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} w_n &= \sum_{n=0}^{N} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \\
&= (\ln(u_1) - \ln(u_0)) + (\ln(u_2) - \ln(u_1)) + \cdots + (\ln(u_{N+1}) - \ln(u_N)) \\
&= \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0)
\end{aligned}$$

   Et donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(u_{N+1}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) donc, par définition :

$$\boxed{\text{La série } \sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \text{ diverge.}}$$

   (b) On sait que :

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\sqrt{u_n^2 + u_n}) - \ln(u_n) \\
&= \ln\left(u_n\sqrt{1 + \tfrac{1}{u_n}}\right) - \ln(u_n) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

   Et comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, en substituant $x = \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2u_n}.}$$

   On a $w_n \geq 0$ (car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante) et aussi $\dfrac{1}{2u_n} \geq 0$. On peut donc appliquer les théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.
   On sait que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u_n}$ et que $\sum w_n$ diverge, donc par comparaison, la série $\sum \dfrac{1}{2u_n}$ diverge.

$$\boxed{\sum \frac{1}{u_n} \text{ diverge.}}$$

IV - Une suite définie implicitement

1. **Théorème de la bijection monotone**

   Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre I et l'intervalle image $f(I)$.

   On peut dire de plus que dans ce cas, la bijection réciproque de f est continue sur $f(I)$ et de même monotonie que f.

2. Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = e^x + x$. La fonction f ainsi définie est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $[1, +\infty[$. Ainsi, tout élément de $[1, +\infty[$ possède un et un seul antécédent par f dans $[0, +\infty[$. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = e^x + x = n.$$

   On note $x = u_n$.

3. **En utilisant les propriétés de la bijection réciproque :** On note $g : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ la bijection réciproque de f. La fonction g est alors aussi strictement croissante et, et dressant son tableau de variation, on trouve $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$.

   Or $n = f(u_n)$ donc $u_n = g(n)$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = +\infty.}$

   En utilisant des manipulations algébriques : On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $e^{u_n} + u_n = n$.
   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq e^x$ donc $n = e^{u_n} + u_n \leq 2e^{u_n}$ ou encore $\ln(n) \leq u_n + \ln(2)$.
   Et par minoration, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$

4. On a $e^{u_n} + u_n = n$ donc $\ln(e^{u_n} + u_n) = \ln(e^{u_n}(1 + u_n e^{-u_n})) = \ln(n)$. Par conséquent,

$$u_n + \ln(1 + u_n e^{-u_n}) = \ln(n).$$

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n e^{-u_n} = 0$ et par suite $\ln(1 + u_n e^{-u_n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} = u_n e^{-u_n} \underset{n \to +\infty}{o}(u_n)$.
   On a donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n + \ln(1 + u_n e^{-u_n}) = \ln(n)$ et par suite :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$$

5. D'après la question précédente, on a : $\dfrac{u_n}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^3} = \dfrac{\ln(n)}{n} \dfrac{1}{n^2}$.
   Donc $\dfrac{\frac{u_n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\dfrac{u_n}{n^3} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   Or la série de Riemann, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, et comme les séries sont à termes positifs, on peut appliquer les théorèmes de comparaison :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^3} \text{ converge.}}$$

6. On pose $v_n = u_n - \ln(n)$.

(a) On connaît un équivalent de u_n, on en cherche un de e^{u_n} (sans composer par l'exponentielle !!!).
On a $e^{u_n} = n - u_n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$. Finalement $\boxed{e^{u_n} = n - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$

On pouvait aussi remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n e^{-u_n} = 0$ par croissance comparée et avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Et donc :

$$n = e^{u_n}\left(1 + u_n e^{-u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n}.$$

(b) On a $e^{u_n}\left(1 + u_n e^{-u_n}\right) = n$ et donc $u_n + \ln(1 + u_n e^{-u_n}) = \ln(n)$.
On obtient $v_n = u_n - \ln(n) = -\ln(1 + u_n e^{-u_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n e^{-u_n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n e^{-u_n} = 0$.

Finalement

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n e^{-u_n} = -u_n \frac{1}{e^{u_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}.}$$

On obtient le développement asymptotique suivant pour u_n : $\boxed{u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$

Exercices supplémentaires facultatifs

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^2 + 3u + 2Id = 0$ (avec $u^2 = u \circ u$).
Montrer que $F = \text{Ker}(u + Id)$ et $G = \text{Ker}(u + 2Id)$ sont supplémentaires dans E.

Correction : On raisonne par analyse et synthèse.

Soit $x \in E$.

• **Analyse :** Supposons qu'il existe $y \in$Ker(u+Id) et $z \in$Ker$(u + 2\text{Id})$ tels que $x = y + z$.
Par définition, $y \in$Ker(u+Id) donc $u(y) + y = 0$, ou encore $u(y) = -y$. De même, $z \in$Ker$(u + 2\text{Id})$ donc $u(z) = -2z$. On cherche à exprimer y et z uniquement en fonction de x (que l'on « connaît »).

$$\begin{array}{rcl} x & = & y + z \\ u(x) & = & u(y) + u(z) = -y - 2z \end{array}$$

On résout ce système en y et en z, on obtient :

$$\boxed{y = 2x + u(x) \quad \text{et} \quad z = -x - u(x)}$$

Ainsi, si y et z existent, ils sont uniquement déterminés par les relations précédentes.

• **Synthèse :** Vérifions que ces vecteurs y et z conviennent.
↪ On a bien $y + z = 2x + u(x) - x - u(x) = x$.
↪ De plus, $u(y) = u(2x + u(x)) = 2u(x) + u^2(x)$.
Or, par hypothèse, $u^2 = -3u - 2\text{Id}$, donc $u(y) = 2u(x) - 3u(x) - 2x = -y$. Ainsi, $y \in$Ker(u+Id).
↪ De même, $u(z) = u(-x - u(x)) = -u(x) - u^2(x) = -u(x) + 3u(x) + 2x = 2u(x) + 2x = -2z$.
Ainsi, $z \in$Ker$(u + 2\text{Id})$.

• **Conclusion :** Finalement, on a démontré l'assertion suivante.

$$\forall x \in E,\ \exists ! y \in \operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}),\ \exists ! z \in \operatorname{Ker}(u+2\mathrm{Id}), \quad x = y+z.$$

C'est la $\boxed{\text{définition}}$ de

$$\boxed{E = \operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u+2\mathrm{Id}).}$$

Exercice 2 (Oral Centrale PSI et Mines-Ponts PC)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

1. Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 est aussi racine de P.
2. Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P
4. Déterminer tous les polynômes solution.

Correction :

1. Si ω est racine de P alors $P(\omega)=0$ et donc $P(\omega^2) = P(\omega)P(\omega-1) = 0$, et ω^2 est aussi racine de P.

2. Si ω est racine de P, alors ω^2 aussi, et donc $(\omega^2)^2 = \omega^4$ aussi... Par une récurrence immédiate :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \omega^{2^n} \text{ est racine de } P.$$

Or si on avait $\omega \neq 0$ et si $|\omega| \neq 1$ alors l'ensemble $\{\omega^{2^n},\ n \in N\}$ serait infini (la suite des modules est strictement monotone). Dans ce cas, le polynôme P aurait une infinité de racines et serait le polynôme nul, ce qui est exclu par l'énoncé (polynôme non constant).
Et donc $\boxed{\text{si } \omega \text{ est racine de } P \text{ alors } \omega = 0 \text{ ou } |\omega| = 1.}$

3. On remarque que si x est racine alors en évaluant en $X = x+1$, on trouve $P((x+1)^2) = P(x+1)P(x) = 0$ donc $(x+1)^2$ est aussi racine.
Ainsi, si 0 est racine, alors $(0+1)^2 = 1$ aussi, puis $(1+1)^2 = 4$ aussi, puis $(1+4)^2 = 25$ aussi... On trouve une suite x_n d'entiers définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = (x_n+1)^2$.
On a $x_{n+1} - x^n = x_n^2 + x_n + 1 > 0$ (polynôme de degré 2 en x_n sans racine réelle), donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Et ces entiers distincts sont tous racines de P... même contradiction.
Donc, $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } P.}$

4. Le polynôme P n'est pas constant donc il possède au moins une racine complexe z (qui est de module 1). D'après ce qui précède, $(1+z)^2$ est aussi racine de P, donc elle est aussi de module 1.
On a donc $P(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad |z| = |z+1| = 1$.
On écrit $z = e^{i\theta}$ et donc $|z+1|^2 = (\cos(\theta)+1)^2 + \sin^2(\theta) = 1$, on trouve $2 + 2\cos(\theta) = 1$ donc $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$.
Ainsi les seules racines possibles de P sont $j = e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j} = e^{-2i\pi/3}$. Comme P est à coefficients réels, si l'un est racine, l'autre aussi et avec la même multiplicité. Et donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\boxed{P(X) = (X-j)^n(X-\bar{j})^n = (X^2+X+1)^n.}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que tous ces polynômes sont bien solutions :

$$P(X)P(X-1) = \Big(X^2+X+1\Big)^n\Big((X-1)^2+(X-1)+1\Big)^n = \Big(X^2+X+1\Big)^n\Big(X^2-X+1\Big)^n = \Big(X^4+X^2+1\Big)^n = P(X^2).$$

Exercice 3 (Oral Centrale PSI)

1. Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Exhiber une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$P - P' = Q.$$
   (b) Montrer que, si Q est à valeurs positives, il en est de même pour P.
   (c) Montrer que, si Q est à coefficients positifs, il en est de même pour P.

Correction :

1. On trouve assez facilement $u(X^k) = kX^{k-1}$.
On prend donc $e_0 = X^n$.
Puis $e_1 = u(e_0) = nX^{n-1}$, $e_2 = u(e_1) = u^2(e_0) = n(n-1)X^{n-2}$... et plus généralement :

$$e_k = u^k(e_0) = n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}.$$

La famille $(e_0, \dots, e_n)$ est échelonnée en degrés et ses vecteurs sont non nuls, donc elle est libre. Et comme elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Par construction, la matrice de u dans cette base est la matrice $T = (t_{i,j})_{0 \le i,j \le n}$ où $t_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.

2(a). Cela revient à montrer que l'application $\mathrm{Id} - u : \ P \longmapsto P - P'$ est une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
On remarque d'abord qu'elle est linéaire (immédiat) et donc $\mathrm{Id} - u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus sa matrice dans la base construite en question 1 est $I_{n+1} - T$ qui est triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls (il valent tous 1). Elle est donc inversible. A fortiori $\mathrm{Id} - u$ est bijectif, et donc :

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad Q = (\mathrm{Id} - u)(P) = P - P'.}$$

2(b). Supposons que Q est à valeurs positives : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \ge 0$.
Ainsi, Q est de degré pair et de coefficient dominant positif.
Comme $Q = P - P'$, P est aussi de degré pair et de coefficient dominant positif. On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) < 0$.
L'application $x \longmapsto P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$, P possède au moins une racine dans $]-\infty, x_0[$, on note α la plus grande de ces racines (il y en a un nombre fini).
De même, P possède au moins une racine dans $]x_0, +\infty[$, on note β la plus petite de ces racines (il y en a un nombre fini).
Par construction, $P(\alpha) = P(\beta) = 0$, et P ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, P est de signe constant, celui de $P(x_0)$.

Ainsi, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, on a $P(x) \le 0$ et comme $P'(x) = P(x) - \underbrace{Q(x)}_{\ge 0}$, on a aussi, $P'(x) \le 0$.

L'application $x \longmapsto P(x)$ est donc décroissante sur $]x_0, \beta[$, ce qui est absurde puisque $P(x_0) < 0 = P(\beta)$. Donc :

$$\boxed{\text{si } Q \text{ est à valeurs positives, } P \text{ l'est aussi.}}$$

2(c). On suppose que Q est à coefficients positifs. On s'inspire de la série géométrique pour déterminer l'inverse de $\mathrm{Id} - u$. En effet, si $|x| < 1$, l'inverse de $1 - x$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.
Ici, on remarque que u est nilpotente d'indice $n+1$. Vérifions que $\mathrm{Id} + u + u^2 + \cdots + u^n$ est l'inverse de $\mathrm{Id} - u$.
En effet, $(\mathrm{Id} - u)(\mathrm{Id} + u + u^2 + \cdots + u^n) = \mathrm{Id} - u^{n+1} = \mathrm{Id}$.
Or $Q = (\mathrm{Id} - u)(P)$ donc :

$$P = (\mathrm{Id} - u)^{-1}(Q) = (\mathrm{Id} + u + u^2 + \cdots + u^n)(Q) = Q + Q' + Q'' + \cdots + Q^{(n)}.$$

Et comme les coefficients de Q sont positifs, ceux de P le sont également.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt[4]{n + \sqrt[4]{(n-1) + \sqrt[4]{\cdots + \sqrt[4]{1}}}}.$$

1. Etablir une relation entre u_n, u_{n-1} et n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \sqrt{n}$. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \circ(n)$ puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[4]{n}$.
3. On considère alors la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = u_n - \sqrt[4]{n}$.
   Déduire de la première question un équivalent de α_n puis montrer que $u_n = n^{1/4} + \dfrac{1}{4\sqrt{n}} + \circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction :

1. De manière évidente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{u_n^4 = n + u_{n-1}.}$

2. Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 \leq \sqrt{0}$ et pour $n = 1$, $u_1 = \sqrt[4]{1} = 1 \leq \sqrt{1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons savoir que $0 \leq u_n \leq \sqrt{n}$. On alors

$$u_{n+1}^4 = n + 1 + u_n \leq n + 1 + \sqrt{n}.$$

On veut montrer que $n + 1 + \sqrt{n} \leq (n+1)^2$, c'est-à-dire que $\sqrt{n} \leq (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} \leq n$, donc $\sqrt{n} \leq n^2 + n$.
On a bien démontré $u_{n+1}^4 \leq n + 1 + \sqrt{n} \leq (n+1)^2$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{n+1}$.

Par le principe de récurrence, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \sqrt{n}.}$

Puisque $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, on a aussi $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n).}$

Par suite, $n + u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $\boxed{u_n = \sqrt[4]{n + u_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[4]{n}.}$

3. On a $\alpha_n = u_n - \sqrt[4]{n} = \sqrt[4]{n + u_{n-1}} - \sqrt[4]{n} = \sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}} - 1\right)$.
Or $\dfrac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_{n-1}}{n-1} = 0$ car $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n-1)$ donc

$$\left(\sqrt[4]{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_{n-1}}{4n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[4]{n-1}}{4n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[4]{n}}{4n}.$$

En reportant, on obtient $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[4]{n}\dfrac{\sqrt[4]{n}}{4n} = \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$. Et par suite $\boxed{u_n = n^{1/4} + \dfrac{1}{4\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).}$

Exercice 5

Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On considère une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante, convergeant vers 1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto r_n.f(x)$.

1. Montrer que f (resp. f_n) admet un unique point fixe I (resp. I_n).
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1. On définit $g(x) = f(x) - x$ et $g_n(x) = f_n(x) - x$.
Les fonctions g et g_n sont continues car les fonctions f et f_n le sont.
De plus, f est décroissante, $-Id : x \longmapsto -x$ est strictement décroissante, donc leur somme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par le même raisonnement, g_n est aussi strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Par le théorème de la bijection monotone, g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur son image.
Or $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ (f est à valeurs positives).
De plus par le théorème de la limite monote, f est décroissante positive (donc minorée), donc elle admet une limite finie en $+\infty$. Et par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Ainsi, 0 est dans l'ensemble image de g, donc il possède un unique antécédant par g, ce qui s'écrit en revenant à f :

$$\boxed{\exists! I \in \mathbb{R}^+, \quad f(I) = I.}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $I_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $\boxed{f_n(I_n) = I_n.}$

2. Faire un dessin !
On essaie de placer I, I_{n+1} et I_n dans le tableau de variations de g_n. Comme g_n est stritement décroissante, cela revient à comparer leurs images par g_n.
Puisque $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq r_{n+1} \leq r_n.$$

- On sait, par définition, que $g_n(I_n) = 0$.
- On sait, par définition, que $g_{n+1}(I_{n+1}) = 0 = r_{n+1}f(I_{n+1}) - I_{n+1}$.
  Donc $g_n(I_{n+1}) = r_n f(I_{n+1}) - I_{n+1} \geq r_{n+1} f(I_{n+1}) - I_{n+1} = 0 = g_n(I_n)$ car $r_n \leq r_{n+1}$ et $f(I_{n+1}) \geq 0$.
  Et comme g_n est décroissante, on obtient $\boxed{I_{n+1} \leq I_n.}$
- On sait, par définition, que $g(I) = 0 = rf(I) - I$.
  Donc $g_n(I) = r_n f(I) - I \geq f(I) - I = 0 = g_n(I_n)$ car $1 \leq r_n$ et $f(I) \geq 0$.
  Et comme g_n est décroissante, on obtient $\boxed{I \leq I_n.}$

Le dernier point est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc a fortiori pour $n+1$. On a donc démontré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I \leq I_{n+1} \leq I_n.}$$

Le théorème de la limite monotone s'applique, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$, et par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $\ell \geq I$.

Pour conclure, on passe à la limite dans l'égalité $f_n(I_n) = r_n.f(I_n) = I_n$. Mais... il faut d'abord s'assurer que ces limites existent !
Puisque f est continue en ℓ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \ell$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(I_n) = f(\ell)$.
On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1$.
On obtient $f(\ell) = \ell$. Et donc $\boxed{\ell = I \text{ est l'unique point fixe de } f.}$

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+)$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = 0$.
3. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, et $C > 0$ tels que $\forall n \geq N,\ f(n) \leq \dfrac{C}{2^n}$.
4. En déduire la convergence de $\sum f(n)$.

Correction :

1. La fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ convient en effet : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -2x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

2. On revient à la définition de limite. Pour tout $M > 0$, il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \geq A,\ \frac{f'(x)}{f(x)} \leq -M.$$

En particulier, pour tout entier $n \geq A$ et pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $\dfrac{f'(t)}{f(t)} \leq -M$.
En intégrant sur $[n, n+1]$ (utiliser les hypothèses sur f), on obtient :

$$\ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) \leq -M$$

Par définition de limite, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{f(n+1)}{f(n)}\right) = -\infty$ et en composant par l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 0.}$$

3. Par définition de limite (avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$), il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N,\ \dfrac{f(n+1)}{f(n)} \leq \dfrac{1}{2}$ i.e. $f(n+1) \leq \dfrac{1}{2} f(n)$.
Ainsi, si $n \geq N$, on a :

$$f(n) \leq \frac{1}{2} f(n-1) \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-N}} f(N).$$

En posant $C = 2^N f(N)$, on a bien démontré qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, et $C > 0$ tels que

$$\boxed{\forall n \geq N,\ f(n) \leq \frac{C}{2^n}.}$$

4. Or la série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^n}$ converge, donc par les théorèmes de comparaison (les termes sont bien positifs car f est à valeur dans $\mathbb{R}^+$), on a bien :

$$\boxed{\sum f(n) \text{ converge.}}$$