PSI 2023-2024
Lycée Châtelet

Devoir non surveillé 0

Travail de Recherche

À rendre le lundi 4 septembre

Dans ce devoir, deux problèmes sont proposés, puis quelques exercices facultatifs, certains d'un niveau plus difficile. Ils sont un premier pas vers la préparation aux concours. Il est important d'y passer du temps. Cette partie est **à rendre** le lundi 4 septembre, jour de la rentrée.

Chacun rendra un travail **personnel** à la mesure de ses capacités et de ses ambitions, en fonction aussi du temps passé sur la première partie (révisions en autonomie). Vous pouvez me poser des questions par mail à l'adresse suivante :

Sophie Dion : `dion.mouze@free.fr`

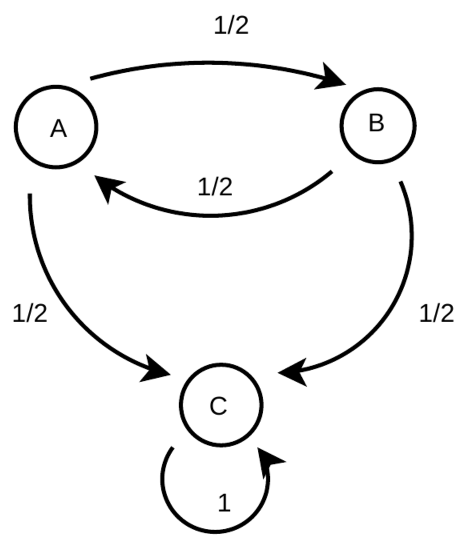
Bonnes vacances à tous !

Problème 1

Algèbre linéaire et probabilités

On considère le jeu suivant :

- on pose aléatoirement un jeton sur une des trois cases A, B, C selon les probabilités respectives u_0, v_0, w_0 : c'est la disposition initiale aléatoire à l'étape 0 ;
- on déplace ensuite indéfiniment le jeton sur l'une des cases A, B, C (le sur-place est donc parfois possible) selon les probabilités présentées sur le graphe suivant :



Par exemple, à l'étape n, si le jeton est en position A, on le déplace sur B avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et sur C avec la même probabilité.
On note A_n l'évènement « être en A à l'étape n », on note de même B_n et C_n.
On note aussi $a_n = P(A_n)$ et on note de même $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

I - Un peu d'algèbre linéaire.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer MC_1 où $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On note $E_{1/2}(M)$ le sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par : $E_{1/2}(M) = \operatorname{Ker}\left(M - \dfrac{1}{2}I_3\right)$.
   (a) Déterminer des réels α, β tels que $E_{1/2}(M) = \operatorname{Vect}\{C_2\}$ avec $C_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Sans calcul, exprimer MC_2 en fonction de C_2.
3. On note $E_{-1/2}(M)$ le sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par : $E_{-1/2}(M) = \operatorname{Ker}\left(M + \dfrac{1}{2}I_3\right)$.
   (a) Déterminer des réels γ, δ tels que $E_{-1/2}(M) = \operatorname{Vect}\{C_3\}$ avec $C_3 = \begin{pmatrix} \gamma \\ -1 \\ \delta \end{pmatrix}$.
   (b) Sans calcul, exprimer MC_3 en fonction de C_3.
4. On définit $P = (C_1 \mid C_2 \mid C_3)$ la matrice obtenue en concaténant les trois colonnes C_1, C_2, C_3 c'est-à-dire :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & -1 \\ 1 & -1 & \delta \end{pmatrix}.$$
   Montrer que P est inversible.
5. On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M c'est-à-dire :
$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & y = \left(\frac{1}{2}x_2,\ \frac{1}{2}x_1,\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3\right) \end{array} \right.$$
   (a) Rappeler ce qu'est la base canonique de E. On la notera $\mathcal{B}= (e_1, e_2, e_3)$.
   (b) Donner la matrice de u dans cette base.
   (c) On note X la colonne des coordonnées dans cette base de $x \in E$.
   Comment s'exprime matriciellement Y la colonne des coordonnées de $y = u(x) \in E$ à l'aide de X et de M ?
6. Soit $\mathcal{B}'= (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base de E telle que P soit la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,
   (a) Exprimer e'_1, e'_2 et e'_3 dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En utilisant la définition de C_1, C_2, C_3, exprimer les vecteurs $u(e'_1), u(e'_2), u(e'_3)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire, en revenant à la définition, la matrice M' de u dans la base $\mathcal{B}'$.
7. Rappeler la relation (dite de changement de base), entre la représentation matricielle M de u dans $\mathcal{B}$ et M' celle dans $\mathcal{B}'$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P(M')^n P^{-1}$.
9. Calculer $(M')^n$.
10. Calculer P^{-1}.
11. En déduire un calcul explicite de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

II - Un peu de probabilité.

1. Après avoir rappelé la formule des probabilités totales de manière générale, l'appliquer soigneusement pour montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations :

   (1) : $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n$

   (2) : $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$

   (3) : $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + c_n$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = MX_n$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = M^n X_0$.

   (c) Calculer explicitement X_n pour $n \in \mathbb{N}$.

   (d) En déduire les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Comment interpréter ce résultat ?

Problème 2
Étude de suites et de séries

Toutes les parties de ce problème sont indépendantes.

I - Quelques idées reçues

• Pour justifier qu'une affirmation est vraie, il faut la démontrer en utilisant ses résultats de cours. Par exemple :

« Le terme général d'un série convergente est borné »

C'est **Vrai** !
En effet, si $\sum u_n$ converge, alors son terme général tend vers 0.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (de limite nulle) et donc elle est bornée.

• Pour justifier qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

« Une suite réelle est soit convergente, soit divergente vers $\pm\infty$ »

C'est **Faux** !
Prenons **par exemple**, $u_n = (-1)^n$. On a $|u_n| = 1$ donc $(u_n)_{n\in}$ ne diverge pas vers $\pm\infty$.
Et si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, on aurait aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.
Mais $u_{2n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1 \neq 1$, contradiction.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire en justifiant, si elles sont vraies ou fausses.

1. « Une suite est soit croissante, soit décroissante. ».
2. « Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ ».
3. « Si $|u_n| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ ».
4. « Si $u_n > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = +\infty$ ».
5. « Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ ».
6. « Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ».
7. « Si u_n ne s'annule pas alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$ ».
8. « Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge ».

II - Suites adjacentes

Dans cette partie, on se donne un réel $r \geq 1$. On définit deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, v_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{pu_n + v_n}{p+1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{pv_n + u_n}{p+1}.$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. Écrire une fonction `suite(`n`,`p`)` en `Python`, ayant pour arguments un réel $p \geq 1$ et un entier naturel n, et renvoyant la liste `[`u_n`,`v_n`]` ou u_n et v_n sont définis par l'énoncé.
3. Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de $u_n - v_n$. En déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction n.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n + v_n$. En déduire la valeur de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

III - Une suite définie par une intégrale

1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

   Rappeler la condition du cours qui permet de justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$.
3. Calculer I_0, I_1, I_2.
4. Justifier que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels **strictement** positifs.
5. À l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt = \frac{1}{n} I_{n+1}.$$

6. En déduire, en remarquant aussi que $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.$$

7. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $a_n = nI_{n-1}I_n$.

   Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et en déduire que $I_{n-1}I_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
8. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, on a l'encadrement $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.
9. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}$.
10. En déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
11. En utilisant la question III.6 et les valeurs de I_0 et de I_1, exprimer I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.
12. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2}$.

IV - Une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.

1. Énoncer précisément le théorème de la limite monotone pour les suites réelles.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et que $u_n > 0$.
3. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer que la seule limite possible pour u_n est $\ell = 0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

   (a) Pour $N \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n$ et en déduire la nature de la série $\sum v_n$.

   (b) Déterminer un équivalent simple de v_n en fonction de u_n. En déduire que $\displaystyle\sum \frac{1}{u_n^2}$ converge.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

   (a) Pour $N \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} w_n$ et en déduire la nature de la série $\sum w_n$.

   (b) Déterminer un équivalent simple de w_n en fonction de u_n. En déduire que $\displaystyle\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

IV - Une suite définie implicitement

1. Énoncer précisément le théorème de la bijection monotone (ou de la bijection continue, c'est selon !).
2. Montrer que l'équation $e^x + x - n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) possède une unique solution appartenant à $\mathbb{R}_+$.
   On note u_n cette solution.
3. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   On pourra soit utiliser les propriétés d'une bijection réciproque (variations, limites), soit minorer u_n à partir de l'égalité $e^{u_n} + u_n = n$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(n) = u_n + \ln(1 + u_n e^{-u_n}).$$

   En déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.
5. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^3}$.
6. On pose $v_n = u_n - \ln(n)$.
   (a) Déterminer un équivalent de e^{u_n}.
   (b) En déduire un équivalent de v_n et écrire le développement asymptotique obtenu pour u_n.

Exercices supplémentaires facultatifs
Pour les 5/2 ou ceux qui visent des écoles plus sélectives

Ces exercices sont vraiment plus difficiles et demandent un temps important de recherche. N'hésitez pas à demander des indications.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^2 + 3u + 2Id = 0$ (avec $u^2 = u \circ u$). Montrer que $F = \mathrm{Ker}(u + Id)$ et $G = \mathrm{Ker}(u + 2Id)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

1. Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 est aussi racine de P.
2. Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P
4. Déterminer tous les polynômes solution.

Exercice 3

1. Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Exhiber une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$P - P' = Q.$$
   (b) Montrer que, si Q est à valeurs positives, il en est de même pour P.
   (c) Montrer que, si Q est à coefficients positifs, il en est de même pour P.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt[4]{n + \sqrt[4]{(n-1) + \sqrt[4]{\cdots + \sqrt[4]{1}}}}.$$

1. Etablir une relation entre u_n, u_{n-1} et n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \sqrt{n}$. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \circ(n)$ puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[4]{n}$.
3. On considère alors la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = u_n - \sqrt[4]{n}$.
   Déduire de la première question un équivalent de α_n puis montrer que $u_n = n^{1/4} + \dfrac{1}{4\sqrt{n}} + \circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 5

Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On considère une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante, convergeant vers 1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto r_n.f(x)$.

1. Montrer que f (resp. f_n) admet un unique point fixe I (resp. I_n).
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+)$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = 0$.
3. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, et $C > 0$ tels que $\forall n \geq N,\ f(n) \leq \dfrac{C}{2^n}$.
4. En déduire la convergence de $\sum f(n)$.