Devoir non surveillé 0 - Travail en autonomie
Techniques de base et applications du cours

Dans ce qui suit, on rappelle quelques points de cours et méthodes. On propose aussi quelques exercices résolus à savoir refaire sans hésitation (cf premier devoir surveillé).

En mathématiques, si les calculs et le résultat ont une importance, ce qu'on attend avant tout, est la mise en oeuvre d'un raisonnement précis et rigoureux. Vous attacherez donc une attention particulière à la rédaction des exercices proposés.

Les thèmes du Vade Mecum évoqués dans ce devoir doivent être maîtrisés pour la rentrée.

Partie I : Algèbre linéaire

Vade Mecum

- **Thème 11 :** Sous-espaces vectoriels et applications linéaires
- **Thème 12 :** Familles libres, liées, génératrices
- **Thème 13 :** Formules de changement de base
- **Thème 14 :** Calculs pratiques de déterminants

En vous appuyant sur vos cours et exercices de première année, retravailler les notions et savoir-faire suivants.

À revoir et savoir faire

- Définition et caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
- Savoir définir et caractériser les égalités $E = F + G$ et $E = F \oplus G$.
- Familles libres, familles liées, familles génératrices, définition de $\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_n\}$.
- Espaces vectoriels de dimension finie :
  - ✐ bases (définition et caractérisation).
  - ✐ Cardinal des familles libres, cardinal des familles génératrices.
  - ✐ Caractérisation des bases à l'aide de la dimension.
  - ✐ Caractérisation de $E = F \oplus G$ à l'aide de la dimension.
- Applications linéaires :
  - ✐ Définition, endomorphisme, isomorphisme.
  - ✐ Noyau, image, caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.
  - ✐ En dimension finie : caractérisation des isomorphismes par les bases ou à l'aide des dimensions.
  - ✐ Formule du rang.
- Projecteurs et symétries associés à deux espaces supplémentaires. Caractérisation.
- Calcul matriciel :
  - ✐ Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases, application au calcul de l'image d'un vecteur.
  - ✐ Formule de changement de bases.
  - ✐ Noyau, image, rang d'une matrice.

I.1 - Espaces vectoriels

Vade Mecum

Thème 11 : Sous-espaces vectoriels et applications linéaires

On rappelle que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les ensembles suivants sont munis d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\mathbb{K}^p,\ \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathbb{K}[X],\ \mathcal{F}(U,\mathbb{K}) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{K},\ f \text{ application}\}$$

$$\text{Si } E, F \text{ sont des } \mathbb{K}\text{-espaces vectoriels : } \mathcal{F}(U,E), \mathcal{L}(E,F)$$

Démontrer qu'un ensemble $(F,+,.)$ est un espace vectoriel en revenant à la définition est assez long. Très souvent, on montrera que F est un sous-espace vectoriel de l'un des espaces vectoriels de référence précédents. Plus précisément, si F est contenu dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in F^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda x + \mu y \in F \end{cases}$$

Ainsi, 0 est toujours dans un espace vectoriel F, la somme $x + y$ de deux éléments x et y de F est encore dans F, et les multiples λx d'éléments x de F sont encore dans F.

Exercice rédigé 1

En utilisant ces arguments, justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels.

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3, x + y - 3z = 2\}$
2. $F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est croissante}\}$
3. $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 = y^2\}$.

Solution :

1. $0_{\mathbb{C}^3} = (0,0,0)$ *n'est pas dans* F_1 *donc* F_1 *n'est pas un espace vectoriel.*

2. $Id : x \longmapsto x$ *est dans* F_2 *et pas* $-Id$. *Donc* F_2 *n'est pas un espace vectoriel.*
Attention, la fonction nulle est à la fois croissante et décroissante (et c'est la seule !).

3. $(1,1)$ *et* $(-1,1)$ *sont dans* F_3 *mais pas leur somme* $(0,2)$. *Donc* F_3 *n'est pas un espace vectoriel.*

Exercice rédigé 2

Montrer que l'ensemble F des fonctions paires $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution : *On a :*

- $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- F *est non vide car la fonction identiquement nulle est paire.*
- *Enfin, soient* f, g *deux fonctions de* F *et* λ, μ *des réels. Montrons que* $\lambda f + \mu g$ *est paire. Puisque* f *et* g *sont paires, on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ *et* $g(-x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f + \mu g)(-x) &= \lambda f(-x) + \mu g(-x) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \ = \ (\lambda f + \mu g)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda f + \mu g \in F$ *et* F *est bien stable par combinaisons linéaires.*

Conclusion : $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \text{ c'est donc un espace vectoriel.}}$

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut aussi montrer qu'il s'écrit $\mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}$.

Exercice rédigé 3

Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution :
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\iff \quad 2x - y + z = 0 \quad \iff \quad y = 2x + z \\ &\iff \quad u = (x, y, z) = (x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1) \\ &\iff \quad u \in \mathrm{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \textit{ est un espace vectoriel.}}$

Remarque : en écrivant z en fonction de x, y (ou x en fonction de y, z), on aurait obtenu d'autres bases.

I.2 - Familles de vecteurs

Vade Mecum

Thème 12 : Familles libres, liées, génératrices

Exercice rédigé 4

Soient $f : x \longmapsto e^x$, $g : x \longmapsto e^{2x}$ et $h : x \longmapsto e^{3x}$.
Démontrer que $\{f, g, h\}$ est une famille libre.

Solution : $\boxed{\textit{Soient } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \textit{ tels que } af + bg + ch = 0.}$

C'est une égalité de **fonctions** *qui s'écrit :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a.f(x) + b.g(x) + c.h(x) = 0.$$

On veut montrer que a, b et c sont nuls.

Les vecteurs sont ici des applications. On pourra si nécessaire (et si c'est possible) :
- *donner une valeur à x (c'est une spécialisation)*
- *faire tendre x vers une limite ℓ éventuellement infinie*
- *dériver, intégrer...*

Dans cet exercice, on choisit la deuxième possibilité. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ae^x + be^{2x} + ce^{3x} = e^{3x}(ae^{-2x} + be^{-x} + c) = 0$$

Et donc, puisque e^{3x} n'est pas nul, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \ ae^{-2x} + be^{-x} + c = 0$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient $c = 0$.
On divise alors l'égalité de départ par e^{2x} et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \ ae^{-x} + b = 0$.
Là encore, lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient $b = 0$.
Il reste $af = 0$ et, par exemple, en spécialisant en $x = 0$, on trouve $a = 0$.
On obtient $\boxed{a = b = c = 0}$ *et donc :*
Conclusion : $\boxed{\{f, g, h\} \textit{ est une famille libre.}}$

Exercice rédigé 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on note
$$u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (2,-1,3) \text{ et } u_3 = (1,0,1).$$
La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

Solution :

On résout $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Si $(a,b,c) = (0,0,0)$ est la seule solution, alors la famille est libre. Sinon, on obtient une (ou plusieurs) relation linéaire non triviale liant u_1, u_2, u_3.

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad &\iff \quad a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a - b = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} a = b \\ c = -3b \end{cases} \\
&\iff \quad (a,b,c) = (b,b,-3b)
\end{aligned}$$

Finalement pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $bu_1 + bu_2 - 3bu_3 = 0$ et donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \textit{ n'est pas libre.}}$
En particulier, avec $b = 1$, on trouve la relation linéaire non triviale suivante.

$$u_1 + u_2 - 3u_3 = 0.$$

I.3 - Espaces vectoriels de dimension finie

Un espace vectoriel E de dimension finie, est un **espace vectoriel qui possède une famille génératrice finie**. On peut démontrer dans ce cas qu'il possède des bases et qu'elles sont toutes de même cardinal. On appelle *dimension* de E, le cardinal de ces bases. On peut utiliser sans le redémontrer :

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n, \qquad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np \quad \text{et} \quad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1.$$

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E.

$\boxed{\text{Les bases de } E \text{ sont les familles libres de cardinal maximal.}}$

- Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- Si $\text{card}(\mathcal{F}) > \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est liée.
- Si $\mathcal{F}$ est libre et si $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

$\boxed{\text{Les bases de } E \text{ sont les familles génératrices de cardinal minimal.}}$

- Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $\text{card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.
- Si $\text{card}(\mathcal{F}) < \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ n'engendre pas E.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice et si $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exercice rédigé 6

1. Soit $\mathcal{F} = (P_1, \ldots, P_n)$ une famille de $\mathbb{R}[X]$. Rappeler la définition de « $\mathcal{F}$ est échelonnée en degrés ».
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $P_0 = 1, P_1 = (X-a), P_2 = (X-a)^2, \ldots, P_n = (X-a)^n$.
   Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Solution :

1. Soit $\mathcal{F} = (P_1, \ldots, P_n)$ une famille de $\mathbb{R}[X]$. La famille « $\mathcal{F}$ est échelonnée en degrés » si

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n).$$

2. C'est une famille échelonnée en degrés de polynômes **non nuls** *donc elle est libre.*
De plus, son cardinal est $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ donc :

$$\boxed{\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3. Puisque $\deg(P) \leq n$, on a $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ (formule de Taylor pour un polynôme).
Et donc les coordonnées du polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont :

$$\left(P(a), P'(a), \frac{P''(a)}{2!}, \ldots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right).$$

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a (**à connaître !**) :

$$E = F \oplus G \underset{\text{définition}}{\iff} \forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ \exists! z \in G, \quad x = y + z$$

$$\underset{\text{caractérisation}}{\iff} \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ E = F + G \end{cases}$$

Lorsque E est de dimension finie (et connue !), on pourra utiliser les équivalences suivantes.

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ E = F + G \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

Exercice rédigé 7

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants.

$$P = \{(x,y,z) \in E, x + 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad D = \{(x,y,z) \in E, x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}.$$

1. Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de P et une base de D.
3. Montrer que P et D sont supplémentaires dans E.

Solution :

1. *Soit* $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a les équivalences suivantes.*

$$\begin{aligned} u\in P &\iff x+2y-z=0\\ &\iff u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\x+2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\\ &\iff u\in \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,2)\}\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} u\in D &\iff x+y=0 \text{ et } y+z=0\\ &\iff u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\y\\-y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\\ &\iff u\in \mathrm{Vect}\{(-1,1,-1)\}\end{aligned}$$

Ainsi, $P=\mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,2)\}$ *et* $D=\mathrm{Vect}\{(-1,1,-1)\}$ *et donc*

$$\boxed{P \text{ et } D \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E.}$$

2. *D'autre part, les* **deux** *vecteurs* $(1,0,1)$ *et* $(0,1,2)$ *ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. De même* **le** *vecteur* $(-1,1,-1)$ *est non nul, donc il forme une famille libre. Ainsi :*

$$\boxed{\{(1,0,1),(0,1,2)\} \text{ est une base de } P \text{ et } \{(-1,1,-1)\} \text{ est une base de } D.}$$

3. *On a toujours* $0\in P\cap D$, *puisque* $P\cap D$ *est un espace vectoriel.*
Soit $u\in P\cap D$.
On a $u\in D=\mathrm{Vect}\{(-1,1,-1)\}$ *donc il existe* $a\in\mathbb{R}$ *tel que* $u=a(-1,1,-1)=(-a,a,-a)$.
On a aussi $u\in P=\{(x,y,z)\in E, x+2y-z=0\}$ *donc* $-a+2a-(-a)=0$. *Ainsi* $a=0$, *puis* $u=0$.
Par conséquent, $P\cap D=\{0\}$.

De plus, $\dim(P)+\dim(D)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, *donc* $\boxed{\mathbb{R}^3=P\oplus D.}$

Remarque : *On aurait pu aussi utiliser la méthode suivante.*
$\{(1,0,1),(0,1,2)\}$ *est une base de* P *et* $\{(-1,1,-1)\}$ *est une base de* D, *donc* P *et* D *sont supplémentaires dans* E *si la famille concaténée* $\{(1,0,1),(0,1,2),(-1,1,-1)\}$ *est une base de* E.

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Donc $\{(1,0,1),(0,1,2),(-1,1,-1)\}$ *est une base de* E *et* $\boxed{\mathbb{R}^3=P\oplus D.}$

I.4 - Applications linéaires

Vade Mecum

Thème 11 : Sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Une application linéaire est une application f définie sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, à valeurs dans un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel F et qui est « compatible » avec leur structure d'espaces vectoriels.

Plus précisément, on rappelle la définition suivante.
On dit que $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1. $\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$
2. $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires, c'est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans $\mathbb{K} = F$, et endomorphisme une application linéaire de E dans $E = F$.
On notera $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Remarque 1 : Trés souvent, les élèves confondent les définitions de sous-espace vectoriel et d'application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, cela n'a aucun sens d'essayer de montrer que 0 appartient à f !!!

Remarque 2 : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Remarque 3 : Les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sont données par des expressions linéaires en les coordonnées. Par exemple :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(u) = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x + y + 3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Exercice rédigé 8

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Solution :
On raisonne par double implication.

• *Supposons que* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
Soit $x \in E$. *On a* $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ *donc* $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. *Ainsi* $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$. *Ceci est vrai pour tout* x *de* E *donc* $f \circ g = 0$.

• *Réciproquement, supposons que* $g \circ f = 0$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. *Par définition, il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$.
Alors, $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$ *et donc* $y \in \mathrm{Ker}(g)$. *On a bien montré* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

I.4 - Calcul matriciel

Vade Mecum

Thème 13 : Formules de changement de base
Thème 14 : Calculs pratiques de déterminants

Exercice rédigé 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 en fonction de A et de I_3.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}. On reviendra à la **définition** de matrice inversible.
3. Pour quelles valeurs de λ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle non inversible ? On utilisera le déterminant.
4. On pose $B = A - 2I_3$.
   (a) Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En écrivant $A = B + 2I_3$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. On exprimera A^n en fonction de I_3 et de B.

Solution :

1. Le calcul donne facilement $\boxed{A^2 = 8A - 12I_3.}$

2. On a donc $8A - A^2 = 12I_3$ *ou encore* $A\left(\dfrac{2}{3}I_3 - \dfrac{1}{12}A\right) = \left(\dfrac{2}{3}I_3 - \dfrac{1}{12}A\right)A = I_3$.

Par définition (à connaître) de matrice inversible : A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{2}{3}I_3 - \dfrac{1}{12}A$.

3. Le calcul donne $\det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)^2(6-\lambda)$. *En effet :*

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} & L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} & C_2 \longleftarrow C_2 - C_1 \quad \text{et} \quad C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \\
&= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda)^2
\end{aligned}$$

$A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) \neq 0$.

Et donc : $\boxed{A - \lambda I_3 \text{ est non inversible si et seulement si } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 6.}$

4. *On pose $B = A - 2I_3$.*

   (a) *On a $B^2 = 4B, B^3 = 4B^2 = 4^2B$ et par récurrence $B^n = 4^{n-1}B$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

   (b) *$A^n = (B + 2I_3)^n$ avec B et $2I_3$ qui commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton.*

$$\begin{aligned} A^n = (B+2I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k2^{n-k} = 2^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^{k-1}2^{n-k}B \\ &= 2^nI_3 + 2^{n-2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^kB = 2^nI_3 + 2^{n-2}((2+1)^n - 1)B \\ &= 2^nI_3 + \frac{1}{4}(6^n - 2^n)B \end{aligned}$$

Exercice rédigé 10

Déterminer le rang, le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution : *Le rang de A est aussi le rang de ces colonnes C_1, C_2 et C_3.*

Les deux premières colonnes de A sont indépendantes donc rg(A) =rg$(C_1, C_2, C_3) \geq 2$.

De plus $C_1 + C_2 = C_3$ donc $\boxed{\text{rg}(A) = 2.}$

L'image est engendrée par les colonnes de A. Ainsi, puisque $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$, il suffit d'en choisir deux indépendantes :

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{C_1, C_2\}.}$$

Par la formule du rang, le noyau est de dimension 1, et puisque $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, il contient $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (à vérifier pour s'en convaincre !).

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.}$

On pouvait aussi résoudre le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I.5 - Projecteurs : Très important !

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$.
2. Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle **projection** sur F dans la direction de G l'application suivante.

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array} \right.$$

Ces deux objets (projecteur, projection) n'en font qu'un. C'est-à-dire que tout projecteur est une projection et toute projection est un projecteur. On redémontrera cette année la proposition suivante qu'il faut connaître.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
1. Soit p un projecteur de E.
Alors $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\text{Im}(p)$ dans la direction de $\text{Ker}(p)$.
2. Si $E = F \oplus G$ et si p est la projection sur F dans la direction de G alors p est un projecteur et $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$.

Exercice rédigé 11 (Résultat à connaître!)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p un projecteur de E.
Montrer que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id_E)$.

Solution :

On sait que $p \in \mathcal{L}(E)$ et que $p \circ p = p$. On raisonne par double inclusion.
• *Soit $y \in \text{Im}(p)$.*
Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Et donc $(p - Id_E)(y) = p(y) - y = p(p(x)) - p(x) = p \circ p(x) - p(x) = 0$.
Ainsi $y \in \text{Ker}(p - Id_E)$. On a donc déjà démontré l'inclusion $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(p - Id_E)$.
• *Soit $y \in \text{Ker}(p - Id_E)$. On a donc $y = p(y) \in \text{Im}(p)$. On a démontré l'inclusion $\text{Ker}(p - Id_E) \subset \text{Im}(p)$ d'où le résultat.*

L'exercice suivant est à savoir faire sans hésitation. Deux méthodes de résolution sont proposées.

Exercice rédigé 12

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$ et $G = \{(x,y,z) \in E,\ x + y - z = 0\}$.

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2. On note p la projection sur G dans la direction de F.
   Déterminer l'image par p d'un vecteur $u = (x,y,z) \in E$.
3. Ecrire la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$ et $G = \{(x,y,z) \in E,\ x + y - z = 0\}$.

1. On donne deux méthodes.

• Avec un argument de dimension :

D'une part, si $u \in F \cap G$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = (a,a,a)$ et tel que $a + a - a = 0$.
On obtient $a = 0$, puis $u = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0,\}$.

D'autre part, F est une droite vectorielle et G un plan vectoriel donc

$$\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim(E).$$

Par conséquent $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

• Avec un raisonnement par analyse et synthèse :

Analyse : *Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons connaître $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$.*
On a $v \in F$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = (a,a,a)$. Alors $w = u - v = (x-a, y-a, z-a) \in G$ s'écrit :

$$(x-a) + (y-a) - (z-a) = 0.$$

Par conséquent, $a = x + y - z$ *et*

$$\begin{array}{rcl} v & = & (x+y-z).(1,1,1) \\ w & = & (-y+z, -x+z, -x-y+2z) \end{array}$$

Ainsi, si v *et* w *existent, ils sont uniquement déterminés par ces égalités.*

Synthèse : *On vérifie que* v *et* w *conviennent*
D'une part, $v + w = (x, y, z) = u$.
D'autre part, $v = (x + y - z).(1, 1, 1) \in F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.
Et enfin, $(-y + z) + (-x + z) - (-x - y + 2z) = 0$ *donc* $w \in G$.

Conclusion : *On a démontré que pour tout* $u \in \mathbb{R}^3$*, il existe un unique* $v \in F$ *et un unique* $w \in G$ *tels que* $u = v + w$*. C'est la définition de* $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G.}$

Remarque : *Cette méthode est plus longue, mais le temps perdu ici sera récupéré dans la question suivante !*

2. *On note* p *la projection sur* G *dans la direction de* F.

En utilisant la première méthode : *On sait que* $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ *donc pour tout* $u \in \mathbb{R}^3$*, il existe un unique* $u \in F$ *et un unique* $w \in G$ *tels que* $u = v + w$*. Par définition de* p*, on a* $w = p(u)$*. Déterminons donc* w.
On a $v \in F$ *donc il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $v = (a, a, a)$*. Alors* $w = x - v = (x - a, y - a, z - a) \in G$ *s'écrit :*

$$(x-a) + (y-a) - (z-a) = 0.$$

Par conséquent, $a = x + y - z$ *et*

$$\begin{array}{rcl} v & = & (x+y-z).(1,1,1) \\ w & = & (-y+z, -x+z, -x-y+2z) \end{array}$$

On a donc $\boxed{p(u) = w = (-y+z, -x+z, -x-y+2z).}$

En utilisant la seconde méthode : *Le raisonnement par analyse et synthèse nous donne directement* $\boxed{p(u) = w = (-y+z, -x+z, -x-y+2z).}$

3. *La matrice* M *de* p *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *est déterminée par* $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ -x+z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}$.

On trouve $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$

Partie II : Analyse

Vade Mecum

- **Thème 4 :** Généralités sur les fonctions numériques
- **Thème 5 :** Fonctions usuelles
- **Thème 6 :** Développements limités et applications
- **Thème 8 :** Suites numériques remarquables
- **Thème 9 :** Séries numériques

À revoir et savoir faire

- Séries géométriques.
- Formule du binôme de Newton, Factorisation de $a^n - b^n$.
- Limites de référence, croissances comparées, développement limités usuels **à connaître sans hésitation**.
- Fonctions usuelles : fonctions puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, tangente, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, Arcsinus, Arccosinus, Arctangente.
  - ✐ Connaître leurs ensembles de définition, leurs graphes.
  - ✐ Connaître leurs ensembles de dérivabilité et leurs dérivées.
  - ✐ Connaître les formules de trigonométrie usuelles.
  - ✐ Connaître et savoir manipuler les propriétés algébriques de exp et de ln .
- Formules de dérivation usuelles.
- Recherche des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
  - ✐ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$
  - ✐ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$
- Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor avec reste intégrale et formule de Taylor-Young.

II.1 - Développements limités

Vade Mecum

Thème 6 : Développements limités et application

On peut ajouter, multiplier des développements limités en prenant soin de s'assurer de l'ordre jusqu'auquel on peut aller. On peut aussi composer des développements limités : **attention**, si on utilise un développement de f en 0 pour trouver celui de $f \circ g$, il faut que $g(x)$ tende vers 0 quand x tend vers 0.

Lorsque ce n'est pas le cas, on utilisera les propriétés algébriques des fonctions usuelles pour s'y ramener.
- $\exp(a + u(x)) = \exp(a)\exp(u(x))$ avec $\lim u(x) = 0$.
- Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a + u(x)} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{1 + u(x)/a}$ avec $\lim u(x) = 0$.
- Si $a \neq 0$, $\ln(a + u(x)) = \ln\left(a\left(1 + \dfrac{u(x)}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1 + \dfrac{u(x)}{a}\right)$ avec $\lim u(x) = 0$.
- Pour $\cos(a + u(x)), \sin(a + u(x)), \mathrm{sh}(a + u(x)), \mathrm{ch}(a + u(x))$ avec $\lim u(x) = 0$, on utilisera les formules de trigonométries usuelles.

Exercice rédigé 13

Déterminer les développements limités suivants.

$f_1(x) = e^{\sin(3x)}$ à l'ordre 4 en 0

$f_2(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-2x}}$ à l'ordre 2 en 0

$f_3(x) = \dfrac{\sin(\cos(x))}{1+\operatorname{ch}(x)}$ à l'ordre 3 en 0

$f_4(x) = x^x$ à l'ordre 3 en 1

Solution :

- $f_1(x) = e^{\sin(3x)}$ *à l'ordre* 4 *en* 0.

On peut composer le DL de l'exponentielle en 0 *par celui de* $\sin(3x)$ *car* $\sin(3x)$ *tend vers* 0. *On obtient.*

$$\begin{aligned}
f_1(x) = e^{\sin(3x)} &= 1+\sin(3x)+\frac{\sin^2(3x)}{2!}+\frac{\sin^3(3x)}{3!}+\frac{\sin^4(3x)}{4!}+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(\sin^4(3x))}_{=o(x^4)}\\
&= 1+\left(3x-\frac{(3x)^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)+\frac{1}{2!}\left(3x-\frac{(3x)^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2\\
&\quad+\frac{1}{3!}\left(3x-\frac{(3x)^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^3+\frac{1}{4!}\left(3x-\frac{(3x)^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\\
&= 1+3x-\frac{(3x)^3}{6}+\frac{1}{2!}\left(3x-\frac{(3x)^3}{6}\right)^2+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^4}{4!}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)
\end{aligned}$$

Après calculs, on obtient $\boxed{f_1(x) = e^{\sin(3x)} = 1+3x+\frac{9}{2}x^2-\frac{81}{8}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).}$

- $f_2(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-2x}}$ *à l'ordre* 2 *en* 0.

On ne peut pas composer le DL de $\sqrt{1+u}$ *en* 0 *par celui de* $\sqrt{1-2x}$ *car* $\sqrt{1-2x}$ *ne tend pas vers* 0. *On a :*

$$\begin{aligned}
f_2(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-2x}} &= \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{2}(-2x)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}(-2x)^2+\underset{x\to 0}{o}\left((-2x)^2\right)\right)}\\
&= \sqrt{2-x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \quad (\textit{on factorise par } 2)\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \quad (\textit{on peut maintenant composer les DL.})\\
&= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)
\end{aligned}$$

Après calculs, on obtient $\boxed{f_2(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-2x}} = \sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{5\sqrt{2}}{32}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).}$

• $f_3(x) = \dfrac{\sin(\cos(x))}{1+\text{ch}(x)}$ *à l'ordre* 3 *en* 0.

On ne peut pas composer le DL de $\sin$ *en* 0 *par celui de* $\cos(x)$ *car* $\cos(x)$ *ne tend pas vers* 0. *On utilise les propriétés algébriques de* $\sin$, *en particulier l'expression de* $\sin(a+b)$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
\sin(\cos(x)) &= \sin\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \sin(1)\cos\left(\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)-\cos(1)\sin\left(\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \sin(1)(1+\underset{x\to 0}{o}(x^3))-\cos(1)\left(\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \sin(1)-\cos(1)\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

D'autre part, on ne peut pas composer le DL de $\dfrac{1}{1+u}$ *par celui de* ch *car* $\text{ch}(x)$ *ne tend pas vers* 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\text{ch}(x)} &= \frac{1}{1+1+\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} \quad (\textit{on factorise par } 2)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) = \frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

En multipliant ces deux développement limités, on trouve :

$$\boxed{f_3(x) = \frac{\sin(\cos(x))}{1+\text{ch}(x)} = \frac{\sin(1)}{2}-\left(\frac{2\cos(1)+\sin(1)}{8}\right)x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$$

• $f_4(x) = x^x$ *à l'ordre* 3 *en* 1. *On pose* $u = x-1$ *c'est-à-dire* $x = u+1$.

$$\begin{aligned}
f_4(u+1) = (u+1)^{(u+1)} &= e^{(u+1)\ln(1+u)}\\
&= \exp\left((1+u)\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\underset{u\to 0}{o}(u^3)\right)\right)\\
&= \exp\left(u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\underset{u\to 0}{o}(u^3)\right)\\
&= 1+\left(u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(u^2+u^3\right)+\frac{1}{6}u^3+\underset{u\to 0}{o}(u^3)
\end{aligned}$$

On a donc $f_4(u+1) = 1+u+u^2+\dfrac{1}{2}u^3+\underset{u\to 0}{o}(u^3)$. *En remplaçant* u *par* $x-1$, *on obtient :*

$$\boxed{f_4(x) = x^x = 1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right).}$$

II.2 - Équivalents

Vade Mecum

Thème 6 : Développements limités et application

On peut multiplier, élever à une puissance α fixée, substituer des équivalents.

Attention : on ne peut pas ajouter des équivalents , ni composer un équivalent par une fonction.

On pourra utiliser les développements limités, les croissances comparées ou les équivalents de référence rappelés dans le Vade Mecum.
On pourra aussi utiliser les croissances comparées et négliger des termes.
Par exemple, puisque $x^3\ln(x) = x^2.x\ln(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, on a

$$2x^2 + x^3\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2.$$

Exercice rédigé 14

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes.

$$x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \qquad x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 1}{\sim} \qquad x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 0}{\sim}$$

$$\frac{\tan(\sin(x^2) - x^2)}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \qquad \ln(x + \ln^2(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \qquad \frac{\ln^3(x) + x^2 + 2x\sin(x)}{e^x - x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim}$$

$$\frac{\sin(x\ln(x))}{e^{\tan(x)} - \cos(x)} \underset{x\to+0}{\sim} \qquad \ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \qquad 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim}$$

Solution :

- *On a* $\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$ *donc* $x\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$ *et par conséquent :*

$$\boxed{x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -2x^2}$$

- *On a de manière évidente,* $\lim\limits_{x\to 1} x\ln(x) - 2x^2 = -2$. *Comme cette limite est* **non nulle**, *on en déduit :*

$$\boxed{x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 1}{\sim} -2}$$

- *On a* $x = \underset{x\to 0}{o}(\ln(x))$ *donc* $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x\ln(x))$ *et par conséquent :*

$$\boxed{x\ln(x) - 2x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)}$$

- *À l'aide du développement limité de* sin *à l'ordre* 3 *en* 0, *on obtient :*

$$\sin(x^2) - x^2 = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right) - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{6}.$$

Or $\tan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ *donc* $\tan(\sin(x^2) - x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x^2) - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{6}$.

De plus, $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. *Et par quotient d'équivalents, on trouve :*

$$\boxed{\frac{\tan(\sin(x^2)-x^2)}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6/6}{x^2/2} = -\frac{x^4}{3}}$$

- *Idée à retenir :*

> *On factorise par le plus terme « gros » dans* $(x+\ln^2(x))$*, à savoir* x.
> *On fait ainsi apparaître* $\ln(1+u(x))$ *avec* $u(x)$ *qui tend vers* 0.
> *On peut ensuite utiliser la limite, un équivalent ou un développement limité de* $\ln(1+u)$ *quand* $u\to 0$.

$$\forall x>0, \quad \ln(x+\ln^2(x)) = \ln\left(x\left(1+\frac{\ln^2(x)}{x}\right)\right) = \ln(x)+\ln\left(1+\frac{\ln^2(x)}{x}\right).$$

Quand $x\to 0^+$*, le second terme qui tend vers* 0 *est négligeable devant le premier qui tend vers* $-\infty$. *Ainsi :*

$$\boxed{\ln(x+\ln^2(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)}$$

- *On a* $\ln^3(x)+2x\sin(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$ *donc* $\ln^3(x)+x^2+2x\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

Et aussi, par croissances comparées, $x^3 = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$ *donc* $e^x - x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.

Et par quotient d'équivalents, on trouve : $\boxed{\dfrac{\ln^3(x)+x^2+2x\sin(x)}{e^x-x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2e^{-x}}$

- *D'une part,* $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ *(limite du cours) et* $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. *Donc :*

$$\sin(x\ln(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x).$$

D'autre part, en utilisant les développements limités du cours, on trouve :

$$\begin{aligned} e^{\tan(x)} - \cos(x) &= \left(1+\tan(x)+\frac{\tan^2(x)}{2} + \underbrace{\underset{x\to 0}{o}(\tan^2(x))}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\right) - \left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= \underbrace{\tan(x)}_{\underset{x\to 0}{\sim} x} + \underbrace{\frac{\tan^2(x)}{2}+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x \end{aligned}$$

Et par quotient d'équivalents, on obtient : $\boxed{\dfrac{\sin(x\ln(x))}{e^{\tan(x)}-\cos(x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)}$

- *On a* $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ch}(x)-1) = 0$ *et* $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ *donc :*

$$\ln(\mathrm{ch}(x)) = \ln(1+(\mathrm{ch}(x)-1)) \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{ch}(x)-1.$$

Et à l'aide du développement limité à l'ordre 2 en 0 *de ch, on obtient (deuxième équivalent à connaître) :*

$$\boxed{\ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{ch}(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}}$$

• *On factorise par x (le plus gros terme) sous les deux premières racines, il apparaît ainsi des expressions de la forme $\sqrt{1+u(x)}$ avec $u(x)$ qui tend vers 0. On peut alors utiliser les développements limités du cours.*

$$2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)$$

Or $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *et* $\sqrt{1+\frac{2}{x}} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. *Ainsi :*

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1 &= 2\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}\right)-\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)-1+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{4x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \end{aligned}$$

En multipliant par $\sqrt{x}$, on obtient :

$$\boxed{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x\sqrt{x}}}$$

II.3 - Limites

Vade Mecum

Thème 6 : Développements limités et application

Pour calculer des limites, on utilisera les outils précédents. On peut aussi utiliser le théorème d'encadrement. Par exemple, pour tout $x \neq 0$, on a $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x$,

donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Attention aux expressions du type $a(x)^{b(x)}$! Si la variable est dans l'exposant, que ce soit pour trouver un ensemble de définition, pour dériver ou pour déterminer une limite, on **doit** repasser à la forme exponentielle.

$$\text{si} \quad a(x)>0 \quad \text{alors} \quad a(x)^{b(x)} = e^{b(x)\ln(a(x))}.$$

Ainsi, « 0^0 » et « 1^∞ » sont des formes indeterminées. On **retiendra** les exemples simples suivants.

Exercice rédigé 15

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)}$$

Solution : *On a* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1$.
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n^2\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln(n)}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.

Exercice rédigé 16

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to0^+} x^x \qquad \lim_{x\to0^+} x^{\ln(x)} \qquad \lim_{x\to0^+} x^{1/x}$$

Solution : • $x^x = e^{x\ln(x)} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} e^0 = 1$ • $x^{\ln(x)} = e^{\ln^2(x)} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ • $x^{1/x} = e^{\ln(x)/x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$.

II.4 - Suites récurrentes d'ordre 2

Vade Mecum

Thème 8 : Suites numériques remarquables

Exercice rédigé 17

Déterminer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants.

1. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
3. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

Solution :

1. $u_0 = 1, u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est

$$r^2 - 6r + 8 = (r-2)(r-4) = 0.$$

Par conséquent, il existe des constantes A, B *réelles telles que* $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = A.2^n + B.4^n$. *Or,* $u_0 = 1 = A + B$ *et* $u_1 = 1 = 2A + 4B$ *donc* $A = \frac{3}{2}$ *et* $B = -\frac{1}{2}$ *et finalement*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{2}\left(3.2^n - 4^n\right).}$$

2. $u_0 = 1, u_1 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

   Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. *Son équation caractéristique associée est*

$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0.$$

   Par conséquent, il existe des constantes A, B *réelles telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An+B)3^n$.
   Or, $u_0 = 1 = B$ *et* $u_1 = 0 = 3(A+B)$ *donc* $A = -1$ *et finalement*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (1-n)3^n.}$$

3. $u_0 = 0, u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

   Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. *Son équation caractéristique associée est*

$$r^2 + 2r + 4 = 0.$$

   Les racines sont $-1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm 2i\pi/3}$. *Par conséquent, il existe des constantes* A, B *réelles telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n \left(A\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right).$$

   Or, $u_0 = 0 = A$ *et* $u_1 = 1 = 2B\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ *donc* $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *et finalement*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).}$$

II.5 - Suites arithmético-géométriques

Vade Mecum

Thème 8 : Suites numériques remarquables

Exercice rédigé 18

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1.$$

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ce type de suite est appelé suite arithmético-géométrique.

Solution :

1. *On détermine d'abord les suites constantes* ℓ *solution. Si* $u_n = \ell$, *on a*

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{3}{4}\ell - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = -4.$$

   Soit maintenant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quelconque.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n + 4$. Puisque $\ell = \frac{3}{4}\ell - 1$, on a

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1 \iff u_{n+1} - \ell = \frac{3}{4}u_n - 1 - \ell = \frac{3}{4}u_n - 1 - \left(\frac{3}{4}\ell - 1\right) = \frac{3}{4}(u_n - \ell)$$

$$\iff v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$$

On reconnaît une suite géométrique.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 + 4) - 4.}$

2. Enfin, puisque $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = -4.}$

II.6 - Séries géométriques

Vade Mecum

Thème 9, Paragraphe 9.1 : Séries géométriques

Exercice rédigé 19

Après avoir justifié leur existence, expliciter les sommes suivantes.

1. $S_1(n) = \sum\limits_{k=3}^{n+1} a^k$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. $S_2 = \sum\limits_{k=5}^{+\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1}$.
3. $S_3(n) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.
4. $S_4(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\quad S_5 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Solution :

1. $S_1(n) = \sum\limits_{k=3}^{n+1} a^k$ existe bien car il s'agit d'une somme finie de termes.

- $\boxed{\textit{Si } a \neq 1 :}$

$$S_1(n) = \sum_{k=3}^{n+1} a^k = a^3(1 + a + \cdots + a^{n-2}) = a^3 \sum_{k=0}^{n-2} a^k = a^3 \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a}.$$

- $\boxed{\textit{Si } a = 1 :}$

$$S_1(n) = \sum_{k=3}^{n+1} 1 = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n+1-2 \text{ termes}} = n - 1.$$

2. *Il s'agit de la somme d'une série géométrique convergente puisque sa raison* $q = \dfrac{-2}{3}$ *vérifie* $|q| < 1$.

On calcule cette somme en factorisant par le premier terme $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^4$.

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=5}^{+\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + \left(\frac{-2}{3}\right)^5 + \cdots \\ &= \left(\frac{-2}{3}\right)^4 \left(1 + \left(\frac{-2}{3}\right) + \cdots \right) = \left(\frac{-2}{3}\right)^4 \frac{1}{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{16}{5.3^3} \end{aligned}$$

3. *Il s'agit de la somme (ou plus précisément d'un reste partiel) d'une série géométrique convergente puisque sa raison* $q = \dfrac{1}{4}$ *vérifie* $|q| < 1$.

On calcule cette somme en factorisant par le premier terme $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right) + \cdots \right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3.4^{n-1}} \end{aligned}$$

4. *On dérive* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ *(fonction polynomiale) sur* $]-1,1[$, *puis on évalue en* $x = \dfrac{1}{2}$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, *on a* $x \neq 1$ *et donc :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Par opérations sur les fonctions dérivables, f *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et on a :*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k x^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n}{1-x} + \frac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Et donc, en $x = \dfrac{1}{2}$, *on obtient :* $S_4(n) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = -2(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Enfin, lorsque n *tend vers* $+\infty$, *par croissances comparées, on trouve :*

$$S_5 = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \lim_{n \to +\infty} S_4(n) = 4.$$

Exercice rédigé 20

1. Déterminer l'ensemble D des $t \in \mathbb{R}$ tels que $\sum \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$ converge.
2. Démontrer que pour tout $t \in D$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}.$$

Solution :

1. *Pour $t \in \mathbb{R}$, il s'agit d'une série géométrique de raison* $q = \dfrac{1+t^2}{2} \geq 0$.
Ainsi, on a les équivalences suivantes.

$$\sum \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \text{ converge} \iff \frac{1+t^2}{2} < 1$$

$$\iff 1+t^2 < 2 \iff t^2 < 1$$

$$\boxed{\sum \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \text{ converge} \iff t \in D =]-1,1[.}$$

2. *Pour tout $t \in D =]-1,1[$, on a les égalités suivantes.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{1+t^2}{2}\right)} = \frac{2}{2-(1+t^2)}$$

$$= \frac{2}{1-t^2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \quad \text{car } |t^2| < 1$$

II.7 - Etudes de fonctions

Vade Mecum

Thème 4 : Généralités sur les fonctions numériques
Thème 5 : Fonctions usuelles

Le résultat de l'exercice suivant n'est pas explicitement au programme, mais il convient de le connaître. Il sera très utile dans le exercices.

Exercice rédigé 21

Calculer $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution : *Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction f est dérivable et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}.\frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

Donc f est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Or $f(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

On obtient de même f sur $]-\infty,0[$, et $\boxed{\forall x < 0, \ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}.}$

Exercice rédigé 22

On considère la fonction g définie par $g(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

1. Etudier la fonction g : ensemble de définition, parité, dérivée, variations, courbe.
2. En utilisant la dérivée, exprimer $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
3. Retrouver ce résultat en posant (en justifiant !) $x = \tan\left(\dfrac{u}{2}\right)$ dans $g(x)$.

Solution :

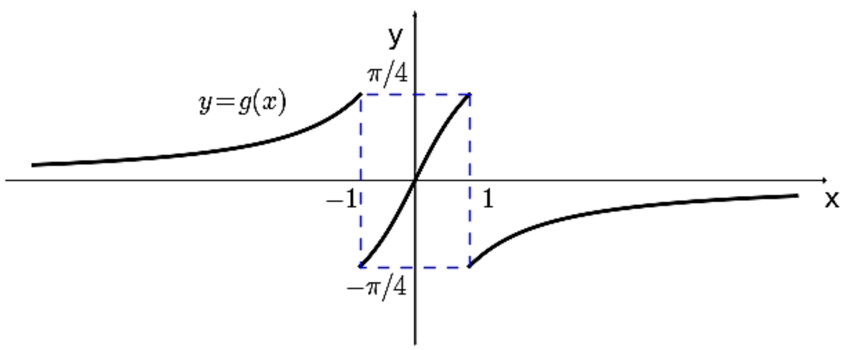
1. *On étudie la fonction g. L'application $x \longmapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$ et elle est impaire. Par composition avec* Arctan *qui est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire, on obtient que :*

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{1,-1\} \text{ et elle est impaire.}}$$

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\dfrac{\pi}{2}$. *Et aussi* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.
Par opérations sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2(1-x^2)+2x(2x)}{(1-x^2)^2} \times \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+2x^4} \\ &= \frac{2(1+x^2)}{1+2x^2+x^4} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)} = \Big(2\text{Arctan}\Big)'(x) \end{aligned}$$

Et donc, sur chaque intervalle $I_1 =]-\infty,-1[, I_2 =]-1,1[$ *et* $I_3 =]1,+\infty[$, *g est croissante.*
Attention : *La fonction g n'est pas croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$!*



2. *Et on a pour $k \in \{1,2,3\}$, pour tout $x \in I_k$,* $g'(x) = \Big(2\text{Arctan}\Big)'(x)$ *et donc*

$$\exists c_k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I_k, \quad g(x) = 2\text{Arctan}(x) + c_k.$$

Pour trouver c_1, on utilise la limite en $-\infty$, pour trouver c_2, on évalue en 0 et pour trouver c_3, on utilise la limite en $+\infty$.
On obtient :

- $\forall x \in]-\infty,-1[, \qquad g(x) = 2\text{Arctan}(x) + \pi$
- $\forall x \in]-1,1[, \qquad g(x) = 2\text{Arctan}(x)$
- $\forall x \in]1,+\infty[, \qquad g(x) = 2\text{Arctan}(x) - \pi$

3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$*. Puisque tangente est surjective sur* $\mathbb{R}$*, on peut trouver* $u \in \mathbb{R}$ *tel que* $\dfrac{u}{2}$ *n'est pas congru à* $\dfrac{\pi}{2}$ *modulo* π *et tel que* $x = \tan\left(\dfrac{u}{2}\right)$*. On a alors*

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\left(\frac{u}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} = \tan(u).$$

- *Si* $x \in]-1,1[$*, on peut choisir* $u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et on a :*

$$g(x) = \mathrm{Arctan}(\tan(u)) = u = 2\mathrm{Arctan}(x).$$

- *Si* $x \in]1,+\infty[$*, on peut choisir* $u \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ *et on a :*

$$g(x) = \mathrm{Arctan}(\tan(u)) = \mathrm{Arctan}(\tan(u-\pi)) = u-\pi = 2\mathrm{Arctan}(x)-\pi.$$

- *Si* $x \in]-\infty,-1[$*, on peut choisir* $u \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ *et on a :*

$$g(x) = \mathrm{Arctan}(\tan(u)) = \mathrm{Arctan}(\tan(u+\pi)) = u+\pi = 2\mathrm{Arctan}(x)+\pi.$$