Révisions pour l'écrit - Consignes de travail

Mardi 26 mars 2024 (1h)

Toute la classe travaille le même sujet 1.
Le sujet 2 pourra être abordé par ceux qui auront déjà traité le sujet 1 à la maison.

Sujet 1 : CCINP MP 2023 maths 1 Exercice 2

Chapitres, notions à revoir :

- **Fonctions de plusieurs variables :** Extrema, matrice hessienne.

(E)/(D) à revoir :

- **(E2) - semaines 22 :** Déterminer les extrema loc aux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$. f admet-elle des extrema locaux ou globaux ?

Travail de préparation :

- Lire le sujet et le rapport de Jury.

Rapport de jury :

1. Question bien réussie malgré certains candidats qui ne calculent pas l'image de la fonction et répondent trop rapidement.
2. Question bien réussie malgré un manque de rigueur chez quelques personnes.
3. La matrice Hessienne est la plupart du temps correcte mais les justifications sur l'extremum sont trop souvent maladroites ou incomplètes.

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

- Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
- Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
- Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
- Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
- Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
- Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
- C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
- Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
- Soigner la présentation.
- Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.

Sujet 2 : Centrale MP 2018 maths 2 (extrait)

Chapitres, notions à revoir :

- **Équations différentielles :** tout.
- **Fonctions de plusieurs variables :** fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$, règle de la chaîne, passage en coordonées polaires.

(E)/(D) à revoir :

- **(E2) - semaine 22 :** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
  Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
  Exprimer les dérivées partielles de F en fonctions de celles de f.
  En déduire la résolution sur $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$: $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
- **(E2) - semaine 22 : Passage en coordonnées polaires sur** $V_2 = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, 0),\ x \leq 0\}$**.** Déterminer un ouvert U_2 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_2 définie par :

$$\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} U_2 & \longrightarrow & V_2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

  est bijective et exprimer φ_2^{-1}.

Travail de préparation :

- Lire le sujet et le rapport de Jury.

Attention : Question 3, remplacer « connexe par arcs » par « convexe ».

Rapport de jury :

Présentation du sujet :

Le sujet, divisé en cinq parties, étudie l'opérateur Laplacien Δ sur l'espace des fonctions régulières définies sur l'espace $\mathbb{R}^n$. L'opérateur Laplacien est important car il apparait dans plusieurs équations fondamentales de la physique (équations des ondes, équations de Schrödinger, équations de la chaleur). Néanmoins, le sujet est auto-contenu et aucune question du sujet ne nécessite une connaissance préalable de l'opérateur Laplacien Δ.

La majeure partie du sujet concerne les propriétés des fonctions f vérifiant $\Delta f = 0$, plus connues sous le nom de « fonctions harmoniques ». La première partie a pour but d'introduire les fonctions harmoniques, et notamment leur stabilité par somme ($\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g = 0 + 0$) et par multiplication par un scalaire ($\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f = 0$). Autrement dit, les fonctions harmoniques forment naturellement un espace vectoriel. Par contre, le produit de deux fonctions harmoniques quelconques n'est, en général, pas harmonique.

Le but de la deuxième partie est la résolution de l'équation $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ sous trois types d'hypothèses additionnelles sur f :

- si f est à variables séparées de la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$,
- si f est radiale, c'est-à-dire de la forme $u(r)$ où (r, θ) sont les coordonnées polaires usuelles ;
- et enfin, plus généralement, si $f(x, y)$ est de la forme $u(r)g(\theta)$ (forme appelée à variables polaires séparables).

L'avantage mathématique de ces trois types de forme est de réduire l'équation aux dérivées partielles $\Delta f = 0$ à une ou deux équations différentielles (à une variable).

Analyse globale des résultats :

La partie I, à priori très facile, n'a pas eu le succès escompté. Les deux difficultés suivantes (aux questions 2 et 3) furent récurrentes et sont la manifestation que le cours de calcul différentiel est mal assimilé par bon nombre de candidats :

- pour une grande majorité, les candidats considèrent que toutes les dérivées partielles sont de la forme $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_k^\alpha}$ et ne font pas mention des dérivées partielles croisées $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_{k_1} \dots x_{k_\alpha}}$,

- le jury a été surpris de constater qu'environ 70 % des candidats n'arrivent pas à déterminer les fonctions régulières dont toutes les dérivées partielles (d'ordre 1) sont nulles. Pourtant en dimension 1, le jury espère bien que ces candidats savent qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante.

La partie II contient beaucoup de questions abordables et beaucoup de candidats y ont puisé la majorité de leurs points. Les questions calculatoires sont souvent bien traitées. Signalons néanmoins les points récurrents qui ont interpellé le jury :

- près de 70 % de candidats passent de l'égalité $u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$ à $\dfrac{u''(x)}{u(x)} + \dfrac{v''(y)}{v(y)} = 0$ sous prétexte que u et v sont deux fonctions non identiquement nulles. Au-delà d'une faute mathématique, il s'agit d'un sérieux problème de réflexe : on ne peut pas diviser par zéro ! Or une fonction non identiquement nulle peut très bien s'annuler,

- concernant la notion de fonction périodique, la quasi-totalité des copies (même les meilleures !) ont affirmé que la fonction $x \longmapsto \cos(\sqrt{\lambda})$ est 2π-périodique quelle que soit la valeur de $\lambda > 0$.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats :

Le jury a remarqué que bon nombre de candidats ont inventé un théorème de différentiabilité pour des séries $\sum f_n(x, y)$ de fonctions différentiables à deux variables. S'il est bien possible d'écrire un tel théorème, le jury rappelle que les sujets sont étudiés pour être cohérents avec le programme en vigueur.

Les extraits du rapport 2017 cités ci-après sont toujours d'actualité.

- Le jury rappelle aux candidats que tous leurs calculs sont lus et il est donc illusoire de simuler une bonne réponse avec des calculs hasardeux qui aboutissent, par magie, à la réponse demandée.

- Le jury souhaite préciser quelques recommandations sur l'usage de la calculatrice. Cette dernière est autorisée mais doit être utilisée de façon réfléchie. Si une question demande de vérifier un calcul avec une valeur explicite, alors le jury ne peut faire aucune distinction entre un candidat ayant réellement fait usage de la calculatrice et un candidat ayant seulement écrit « avoir fait usage de la calculatrice ». Les candidats doivent donc comprendre que l'usage de la calculatrice ne peut être valide dans ce contexte en vue d'une évaluation et par conséquent qu'une démonstration mathématique est attendue. À contrario, si une question nécessite un calcul non donné dans l'énoncé alors la démarche scientifique de l'usage de la calculatrice est parfaitement pertinente.

Un cas de conscience est apparu avec la Q9. demandant un calcul non donné dans l'énoncé d'une dérivée partielle seconde. Il s'avère que le calcul nécessite l'invocation du théorème de Schwarz autorisant un échange de dérivée partielle. Beaucoup de candidats ont fait l'effort d'écrire le calcul (long d'une page environ) en invoquant l'argument exact du théorème de Schwarz et ont donc bénéficié de tous les points. Le jury a choisi de ne pas valoriser les candidats ayant affirmé le résultat sans justification.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q1. Les candidats savent généralement vérifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace fixé à l'avance.

Q2. et Q3. Voir mention ci-dessus.

Q4. Deux erreurs fréquentes ont été rencontrées :

- tout d'abord, la notion de fonction harmonique est définie comme fonction à valeurs réelles, or bon nombre de candidats ont donné des exemples à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (avec a priori $n \geq 2$) ;

- ensuite l'énoncé pose une question fermée, est-il vrai que le produit de deux fonctions harmoniques f et g est aussi harmonique ? La démarche scientifique consiste ou bien à montrer la réponse pour toute paire de fonctions (f, g) ou bien à donner un contre-exemple sur une paire particulière (f, g). Or beaucoup de candidats ont montré que la stabilité de l'harmonicité par produit équivaut à la formule $\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k}$ puis s'arrêtent en énonçant qu'une telle formule est évidemment fausse. Cette démarche scientifique est donc à revoir.

II Exemples de fonctions harmoniques

Q5. Comme mentionné précédemment, les futurs candidats doivent prendre garde à la division par une fonction « non identiquement nulle ». Car même une fonction non identiquement nulle peut s'annuler !

Q6. La résolution d'une équation différentielle de la forme $y'' + \lambda y = 0$ est en général bien faite. Les futurs candidats doivent prendre garde que résoudre signifie « trouver toutes les solutions ». Cela signifie que l'on doit :

- soit raisonner par équivalence ;

- soit raisonner par implication et vérifier que les solutions finales sont convenables.

Q7. La question demande de vérifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ Le jury apprécie moyennement la réponse « par les théorèmes généraux...». Il est normal qu'un sujet contienne des questions faciles et abordables, les candidats ne doivent cependant pas les prendre à la légère : si la fonction étudiée est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on peut mentionner la régularité des fonctions coordonnées, si la fonction étudiée fait intervenir des fonctions usuelles, on peut alors les mentionner.

Q8. et Q9. La règle de la chaine permettant de dériver $\frac{\partial}{\partial \theta} f(r, \theta)$ est généralement bien comprise.

Q10. La question contient un calcul souvent bien fait. Le jury rappelle de nouveau que « les correcteurs lisent tous les calculs ». Voici un oubli souvent constaté dans le cadre des changements de variables polaires : une fois une certaine formule vérifiée pour tous les couples $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, beaucoup de copies n'expliquent pas le passage aux couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Le jury rappelle d'ailleurs que la fonction

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

n'est pas bijective !

Q11. La question demande de chercher certaines fonctions f dépendant de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vérifiant une certaine propriété. Après changement de variables polaires, on devait trouver une fonction de la forme $(r, \theta) \longmapsto A\ln(r) + B$. Environ 66 % des copies ne reviennent pas aux variables x et y, c'est-à-dire à $A \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + B$!

Q13. Une question très facile si l'on sait ce qu'est une fonction « non identiquement nulle », malheureusement 33 % de copies contenaient une réponse fausse.

Q14. Même remarque que la question 5.

Q15. On demande de trouver les fonctions 2π-périodiques vérifiant l'équation $z'' = 0$. Question très facile et bien réussie par les candidats ayant donné quelques arguments. Le jury n'a pas valorisé les réponses constituées d'une seule phrase sans aucune preuve.

Q16. Calcul bien fait en général.

Q18. L'ensemble des solutions de l'équation $z'' + \lambda z = 0$ est globalement bien connu dans le cas $\lambda \neq 0$:

- si $\lambda > 0$, alors z est de la forme $t \longmapsto A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\sin(\sqrt{\lambda}t)$ Par contre, seules 142 copies savent trouver une condition sur $\sqrt{\lambda}$ pour obtenir des solutions 2π-périodiques non nulles. Le moyen le plus rapide est sans doute d'utiliser la forme équivalente $\sqrt{A^2 + B^2}\cos(\sqrt{\lambda}t + \phi)$ pour arriver naturellement à la condition $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}^*$.

- si $\lambda < 0$, alors z est de la forme $t \longmapsto A\exp(\sqrt{-\lambda}t) + B\exp(-\sqrt{-\lambda}t)$ (ou une forme similaire avec des cosinus ou sinus hyperboliques). Par contre, seules 157 copies savent expliquer que la seule solution 2π-périodique est la solution nulle (en examinant les limites en $\pm\infty$).

Q19. et Q20. La condition $\lambda \neq 0$ est imposée dans l'énoncé. Pourtant beaucoup de candidats n'étudient pas le signe de λ dans leur résolution de l'équation différentielle de l'énoncé. Le jury signale une bonne surprise : le changement de fonction inconnue dans l'équation différentielle a été bien mené dans beaucoup de copies.

Mercredi 27 mars 2024 (2h)

Les étudiants ont le choix entre travailler les sujets 3 et 4 (niveau E3A/CCINP) ou le sujet 5 (Mines-Ponts)

Sujet 3 : E3A PSI 2021 Exercice 3

Chapitres, notions à revoir :

- **Intégration :** Intégrabilité, changement de variable dans une intégrale (éventuellement impropre).
- **Suites et séries de fonctions :** Convergence simple, Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.
- **Séries entières :** rayon de convergence (méthodes de calcul), ensemble de définition (théorème des séries alternées).

Travail de préparation :

- Lire le sujet et le rapport de Jury.
- Rédiger les questions 1 et 2 (théorème de convergence dominée).

Rapport de jury : Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur). Les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.

1. La continuité de la fonction $t \longmapsto \exp(-t^n)$ sur $[1, +\infty[$ est trop souvent oubliée.
Certains pensent que la fonction constante, égale à 1, est intégrable sur $[1, +\infty[$.
On voit des arguments tels que : la fonction tend vers 0 en l'infini et donc, on peut la prolonger par continuité en l'infini et donc, l'intégrale est faussement impropre en l'infini... Enfin certains connaissent une primitive de la fonction $t \longmapsto \exp(-t^n)$.

2. La domination n'est pas toujours bien justifiée alors que dans l'ensemble, le théorème de convergence dominée est bien appliqué.

3. Changement de variable pas toujours bien justifié.

4. Malgré une bonne expression de l'intégrale, beaucoup de candidats ne voient pas qu'il faut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée.
A noter de nombreuses limites qui dépendent de n...

5. Question simple en général pas trop mal traitée si ce n'est que le fait que J soit non nulle n'est pas suffisamment évoqué.

6.1. Pas de problème pour le rayon de convergence (si ce n'est qu'il ne faut pas oublier les valeurs absolues).

6.2. Certains candidats n'ont pas vu la différence avec la question précédente.

Conclusion : Nous demandons dans la rédaction des exercices constituant du sujet rigueur et justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

Sujet 4 : E3A PC 2017 Exercice 3

Chapitres, notions à revoir :

- **Variables aléatoires :** Lois, espérance, approximations (Markov, Bienaymé-Tchebychev)

Travail de préparation :

- Lire le rapport de Jury.

Rapport de jury : L'exercice 3 était dans le thème des probabilités mais en pratique axé sur le calcul et le dénombrement.

La première question a posé problème par l'utilisation de l'inégalité de Markov, mais aussi par une rédaction souvent hasardeuse sur les critères de convergences de séries à termes positifs.

Les questions suivantes ont moins inspiré les candidats peut-être soucieux d'aborder vite le dernier exercice, ou rebutés par les techniques calculatoires.

Nous avons remarqué cependant que nombre de bons candidats ont largement traité cet exercice avec souvent un réel succès.

Conseils aux futurs candidats :
Comme souvent dans les rapports de jury de l'écrit, il convient de rappeler aux futurs candidats que les épreuves sont calibrées de manière à ce qu'un candidat de niveau correct et ayant travaillé s´erieusement toute l'année ait une note au dessus de 10/20. A ce titre nous rappelons :

- Qu'il est indispensable de connaître parfaitement les théorèmes et définitions des programmes de première et deuxième année.
- Qu'un théorème s'utilise en rappelant son énoncé et ses hypothèses et en l'appelant par son nom s'il en a un.
- Que les questions nécessitant de longs calculs rapportent des points en conséquence et qu'il ne faut pas les négliger.
- Que dans tous les exercices il y a des points à prendre et qu'on peut tenter de traiter des questions dans toutes les parties.
- Qu'aucune partie du programme ne doit être négligée.
- Que la qualité de la rédaction et de l'argumentation mathématique est un élément fondamental pris en compte lors de l'évaluation.

Sujet 5 :

Chapitres, notions à revoir :

- **Variables aléatoires :** lois, indépendance, espérances, théorème de transfert.
- **Intégration :** intégrales à paramètre
- **Suites et séries de fonctions :** modes de convergence, convergence dominée, continuité.
- **Séries entières :** tout.
- **Espaces vectoriels normés :** Théorème des bornes atteintes.

Travail de préparation :

- Lire le sujet et le rapport de Jury.
- Rédiger les questions 1 et 2.

Rapport de jury (extrait) :

Commentaires généraux :
Ce sujet nécessitait une solide maîtrise des probabilités, testée dans les questions 1 à 5, 14-15 et 19-20, et de l'analyse (intégration, y compris convergence dominée et intégrales à paramètre, séries, séries de fonctions, un peu de topologie), évaluée dans les questions restantes. Il permettait de vérifier la connaissance de plusieurs théorèmes importants du cours, ainsi que la capacité à mener assez rapidement des calculs non triviaux. Le caractère fermé de la plupart des questions a conduit à un barème exigeant en fait de justifications précises.

De bon niveau, le texte restait cependant abordable. Il comprenait un nombre important de questions de difficulté moyenne, nécessitant simplement une connaissance correcte du cours, assortie à une certaine rigueur dans son application et/ou la capacité de mener à bien des calculs simples. Il a permis un étalonnement très satisfaisant des copies. Les meilleurs candidats ont su traiter l'essentiel du sujet, beaucoup ont montré des qualités importantes.

À l'inverse, un lot important de copies témoignent d'un manque de recul sur le cours et de faibles capacités calculatoires. Le premier point les conduit à produire un discours émaillé de graves confusions et très souvent dépourvu de sens ; en particulier, les notions d'espérance et d'égalité en loi sont souvent mal comprises. Pire, dans un nombre non négligeable de copies, les questions 1 à 5 donnent naissance à des écritures absurdes $P(X)$, $P(X())$. Le second point se traduit de façon particulièrement nette dans la manipulation des inégalités ; ainsi, dans les questions 6 à 11, beaucoup de copies écrivent des inégalités portant sur les nombres complexes.

Analyse détaillée des questions :

Q1 - Beaucoup de candidats oublient que, pour définir l'espérance, une condition de convergence absolue est nécessaire.

Q2 - Beaucoup d'erreurs dans cette question très proche du cours. En particulier, confusion fréquente entre « X est bornée » et « X ne prend qu'un nombre fini de valeurs », parfois parce que X est implicitement supposée à valeurs entières.

Q3 - Le premier point était immédiat en appliquant un théorème du cours ; il a parfois donné lieu à des développements étranges. Pour le second point, assez peu de candidats invoquent l'argument simple selon lequel une variable aléatoire dont le carré est d'espérance finie est elle-même d'espérance finie.

Q4 - Beaucoup de candidats confondent égalité en loi et égalité, ce qui les conduit à écrire des relations du genre $f(X) = f(-X) = -f(X)$.

Q5 - Beaucoup de discours sans contenu, qui n'utilisent pas l'indépendance pour montrer que $(-X, -Y)$ et (X, Y) ont même loi.

Q6 - Le résultat était une simple application de la régularité d'une intégrale fonction de sa borne supérieure, qu'il fallait étayer en justifiant la bonne définition de l'intégrale, i.e. en justifiant que $1 - uz \neq 0$ pour $u \in [0, 1]$. Le problème de définition est largement ignoré, ou étrangement abordé via la « règle de Riemann » en une borne, alors que la fonction intégrée est continue sur le segment $[0, t]$. Certains candidats compliquent les choses en se ramenant à une intégrale à paramètre et donnent un résultat (pas toujours juste) sous forme intégrale D'autres utilisent, de manière purement formelle, un logarithme complexe hors programme.

Q7 - Question très élémentaire, reposant sur l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité. La seconde partie n'est quasiment jamais traitée. Beaucoup de candidats écrivent des inégalités entre nombres complexes.

Q8 - Bon nombre de candidats voient qu'il s'agit de permuter une limite et une intégrale. En revanche, les justifications (majoration directe, convergence uniforme ou dominée) ne sont complètes que dans peu de copies.

Q9 - La locution « formule de Taylor » a posé problème. Certaines copies évoquent la formule de Taylor-Young (inutilisable ici). D'autres affirment sans preuve que L est somme de sa série de Taylor en 1.

Q10 - Très peu de justifications pour la première partie, et des confusions entre continuité et continuité séparée. Dans la seconde partie, l'utilisation du théorème des bornes atteintes est rarement vue.

Q11 - Cette application du théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre a été largement abordée. Une partie significative des candidats connaît les hypothèses du théorème et vérifie correctement les hypothèses de domination. D'autres commettent des erreurs surprenantes (par exemple en dérivant sous l'intégrale par rapport à la variable d'intégration).

Q12 - Il s'agissait d'un petit calcul fondé sur la question précédente. Certains candidats effectuent un changement de variable à valeurs complexes dans l'intégrale. Ceux qui calculent correctement F 0 ne donnent pas toujours un argument complet pour F ; dans certaines copies, on lit même $F(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F'(t)dt$, ce qui rassemble beaucoup de fautes en un espace très court.

Q13 - Question de synthèse, qui a permis de récompenser les candidats ayant fait l'effort de comprendre où l'énoncé voulait en venir.

Q14 - La bonne définition, qui découle de la question 2, est souvent omise. Le reste de cette question facile est traité convenablement, au fait près que la valeur absolue de $|\Phi_X(t)|$ disparaît assez fréquemment.

Q15 - La continuité reposait sur un argument de convergence normale, qui n'est vu que par une minorité de candidats.

Q16 - La partie « formelle » des deux calculs est assez souvent comprises dans les copies qui abordent ces questions, même si le passage « de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{N}$ » est souvent savonné. En revanche, les justifications sont rarement complètes.

Q17 - Dans la première sous-question, l'argument de convergence normale n'est pas souvent vu. Les sous-questions suivantes sont rarement abordées.

Q18 - La première partie est rarement traitée. Pratiquement aucun des candidats qui abordent la seconde partie ne voit que la réponse est non, et que l'on a en fait, par parité de Φ_X, la relation (2) (qui s'impose aux candidats ayant bien traité par la suite la question 21).

Q19 à 22 - Ces questions ont été partiellement abordées par les meilleurs candidats et ont également fait l'objet de grappillages. Dans le second cas de figure, les justifications ont souvent été très insuffisantes.

Conseils aux futurs candidats :

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie, afin de maîtriser en profondeur les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités. Il est plus fructueux de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles : les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie. Nous rappelons enfin que les questions « faciles » doivent être correctement et complètement rédigées pour être valorisées, surtout en début de problème.

Nous soulignons également l'importance d'une lecture précise de l'énoncé : beaucoup de candidats traitent les questions en ajoutant des hypothèses superflues : ainsi, dans les questions 1 et 2, les variables aléatoires considérées ne sont pas à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Rappelons pour conclure l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées ; on recommande aux candidats d'employer une encre foncée, qui reste bien visible sur les copies scannées. Une présentation soignée (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) est très appréciée.

Enfin, il est demandé aux candidats de numéroter leurs copies de façon cohérente : les correcteurs n'ont pas à se voir confrontés à un jeu de piste !

Jeudi 28 mars 2024 (3h)

Toute la classe travaille sur le même sujet, chacun à son rythme.

Sujet 6 : Centrale PSI 2023 maths 2

Chapitres, notions à revoir :

- **Suites et séries numériques :** Séries télescopiques, formule de Stirling.
- **Intégration :** fonctions intégrables, théorème fondamental de l'analyse, théorème de continuité/dérivation sous le signe intégrale, comparaisons série/intégrale, sommes de Riemann.
- **Suites et séries de fonctions :** Convergence dominée, théorème de double limite
- **Séries entières :** développements de référence, rayon de convergence, produit de Cauchy
- **Probabilités, Variables aléatoires :** Définition de probabilité, espérance, variance, probabilités totales

(E)/(D) à revoir :

- **(E2) - semaines 2 et 3 :** Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
- **(E1) - semaines 3 et 4 :** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge, puis la calculer.

- **(E3) - semaines 3 et 4 :** Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ telles que $b_n \geq 0$ et $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

  Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.
- **(E2) - semaines 10 et 11 :** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

Travail de préparation :

- Lire le rapport de Jury jusqu'à Q7.
- Traiter au moins la partie 1.

Rapport de jury :

Présentation du sujet :

Le sujet proposé porte sur l'étude de différentes applications autour de la formule de Stirling. La première partie très progressive et très classique met essentiellement en oeuvre des chapitres fondamentaux de première et seconde année que sont l'intégration sur un segment, les primitives, l'intégration sur un intervalle quelconque et les intégrales à paramètres, avec l'utilisation du théorème dérivation et de convergence dominée.

La seconde partie consiste à démonstrer de la formule de Stirling et d'en obtenir une amélioration. Diverses notions d'analyses sont ici évaluées : définition de limite ou d'équivalent, de prolongement par continuité, développements limités, séries numériques et comparaison série-intégrale.

La troisième partie traite d'une marche aléatoire à l'aide de séries entières. Les méthodes et outils usuels sur les séries entières sont mis en œuvre : calcul de rayon de convergence, de développement en série entière, produit de Cauchy.

La quatrième partie porte sur le cas particulier d'une marche aléatoire symétrique avec pour objectif d'obtenir la loi de l'Arcsinus. On utilise des arguments de dénombrements, de calculs de probabilités usuels, mais aussi de l'analyse avec les sommes de Riemann.

Analyse globale des résultats :

Le sujet proposé aux candidats pour cette session se présentait sous une forme légèrement plus longue que la précédente, avec une difficulté raisonnable excepté les dernières questions présentant et utilisant le principe de réflexion. Néanmoins, les meilleurs candidats ont été en mesure de traiter presque toutes les questions avec rigueur et une rédaction claire. Toutes les questions du sujet ont été traitées au moins en partie par plusieurs candidats. L'indépendance de plusieurs parties et la présence de questions très classiques ont permis aux candidats d'avancer dans le sujet ce qu'à pu noter le jury avec la présence importante de copies fournies.

Du point de vue du fond, comme le rapport le détaille plus bas, beaucoup de candidats ont des difficultés à voir l'enchainement et l'objectif des différentes questions, ce qui les bloque lors des questions d'application ou de synthèse.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats :

Les parties I à III ont été abordées par presque tous les candidats.

Partie I

Cette partie est une version très guidée d'une méthode classique permettant d'obtenir la valeur de l'intégrale de Gauss à l'aide d'intégrales à paramètres. Elle a permis aux candidats sérieux d'entrer en confiance dans le sujet.

Q1. Il s'agissait d'établir la convergence absolue d'une intégrale. Beaucoup de candidats oublient la continuité et parlent de convergence sans précision de signe. Cette première question donne bien souvent une indication de la suite de la copie.

Q2. Les résultats de première année sur l'intégrale de fonction continue sur un segment suffisait.

Q3. Le théorème de dérivation est souvent bien connu, en revanche, les dominations locales sont souvent fausses à cause du signe des bornes. Peu de candidats pensent à utiliser la parité.

Q4. Le théorème fondamental de l'analyse a aussi des hypothèses.

Q5. - Q6. Bien réussies dans l'ensemble.

Q7. Intervertir une limite et une intégrale nécessite des hypothèses. Le passage de $\lim g^2$ à $\lim g$ se fait trop souvent sans précisions.

Partie II

Cette partie était l'occasion de mettre en œuvre des compétences très classiques, mais parfois délicates d'analyse : domination, étude locale, développements limités, encadrements...

Q8. On retrouve les mêmes défauts qu'en Q1..

Q9. Très classique. Il faut néanmoins se rappeler que l'on manipule des intégrales généralisées et appliquer le théorème adapté.

Q10. Il fallait trouver le bon changement de variables. Un certain nombre de candidats, en « réussissant » à obtenir le résultat avec des calculs faux, perdent leur crédibilité aux yeux du correcteur.

Q11. Question très peu réussie. La manque de méthode (simplement fixer la variable, puis faire varier n) pour l'étude de la convergence simple est à déplorer. Beaucoup de limites dépendent encore de n.

Q12. Assez bien réussie, même si certains ne parlent que du prolongement en 0.

Q13. Bien peu de candidats s'émeuvent de diviser par une quantité pouvant s'annuler.

Q14. C'était la question la plus délicate de cette partie. Peu de candidats comprennent l'enchainement de questions, en particulier l'utilité de la fonction q. Certains pensent que l'étude de la monotonie de q revient à étudier $q(x+1) - q(x)$.

Q15. Traitée par moins d'un tiers des candidats, et correctement par un tiers de ces derniers. La résolution de cette question, en particulier l'application du théorème de convergence dominée, était pourtant cousue de fil blanc.

Q16. Le calcul du développement asymptotique a été plutôt bien mené. En revanche, l'utilisation de théorème de comparaison nécessite de parler de positivité.

Q17. - Q18. Il s'agissait de démontrer le théorème de sommation d'équivalents. La référence à la positivité de (b_n) est souvent absente.

Q19. - Q20. Très classiques et bien réussies.

Q21. Traitée dans la moitié des copies, et entièrement réussie dans la moité des cas. Il suffisait à nouveau d'être capable d'utiliser les résultats des questions précédentes.

Q22. Très peu traitée. Beaucoup ne voyaient pas comment démarrer.

Partie III

On peut noter un manque global de formalisation en probabilité avec par exemple, des découpages d'événements sans union dont la probabilité s'écrit miraculeusement sous forme de somme, l'utilisation de l'indépendance sans préciser de quelles variables ou de quels événements il est question, le remplacement de variables aléatoires dans un événement... Peu de candidat jugent utile d'utiliser les propriétés admises en introduction de cette partie.

Q23. Presque tout les candidats ont traité cette question. En revanche, beaucoup d'entre-eux ont affirmé que S_n suivait la loi binomiale. Pour cette loi, il était attendu qu'elle soit justifiée.

Q24. Traitée dans 60 % des copies. Elle a été plutôt bien réussie.

Q25. Beaucoup de contorsions pour « justifier » la relation donnée, parfois en contradiction avec la réponse donnée en Q23..

Q26. La règle de d'Alembert pour les séries entières ne s'appliquait pas directement. L'application de la règle pour les séries numériques a été utilisée mais rarement proprement : trop souvent la rédaction se limite à un quotient (éventuellement non défini) et une limite puis immédiatement une conclusion sur le rayon. Ceux qui ont utilisé la formule de Stirling à cette étape s'en sont bien sortis.

Q27. Il fallait discuter sur la valeur du rayon de la série. Peu nombreux sont ceux qui ont envisagé tous les cas possibles.

Q28. Les développements usuels sont bien connus et les candidats sont à l'aise pour l'exprimer à l'aide de factorielles. En revanche, pour certains, la notion de domaine de validité d'un tel développement semble inconnu ou inutile.

Q29. La direction initiale était donnée, peu l'ont suivie. Certains candidats sont prêts à toutes les entourloupes pour obtenir la relation donnée. Ce qui fait que près de la moitié des copies abordant la question n'obtient presque aucun point.

Q30. Question discriminante, le résultat n'était pas donné. Il fallait faire le produit de Cauchy avec soin.

Q31. Bien réussie par ceux ayant obtenu une relation correcte. Bien que l'énoncé le précise, beaucoup ignorent à nouveau de donner le domaine de validité de la formule.

Q32. Comme en Q27., il fallait discuter suivant la valeur du rayon de convergence de la série entière définissant B.

Q33. Rarement traitée. La description de l'événement étudié a pausé problème.

Partie IV

Cette dernière partie de sujet n'a été abordée que dans 38 % des copies.

Q34. - Q36. À nouveau, manque de formalisation pour ce dénombrement classique. Beaucoup de verbiage pour paraphraser l'énoncé. L'équiprobabilité des chemins pour Q35. était attendue.

Q37. - Q42. Questions délicates qui ont permis de mettre en avant les bons candidats. Q43. - Q44. Les candidats à l'aise en analyse ont trouvé ici chaussure à leur pied. Parfois des tentatives de grapillage de candidats désoeuvrés. On rappelle que le théorème sur les sommes de Riemann a des hypothèses.

Q45. - Q46. Seules les très bonnes copies (une quarantaine) traitent ces questions. Concernant la forme, une quantité non-négligeable de copies ne respecte pas les standards de présentations qui peuvent être attendus pour de futurs ingénieurs : écriture claire, lisible, propos structuré, mise en avant des résultats ; mais aussi des standards relatifs à un concours scientifique : répondre effectivement à la question posée, penser à conclure, citer les résultats ou les questions précédentes utilisés, vérifier les hypothèses de validité. Ces copies sont donc pénalisées comme prévu dans la notice de l'épreuve. Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction sitôt l'énoncé entre les mains.

Conclusion :

Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. Il faut privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation. Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signalent honnêtement les manques ou les incohérences de leurs propositions ont toujours d'excellentes notes.

Il est important de noter qu'un problème n'est pas une succession d'exercices indépendants. Il est utile de chercher à comprendre l'objectif des questions posées.

Enfin, le jury ne peut qu'encourager les candidats à mettre l'accent sur le cours et les méthodes de résolutions ; ce n'est qu'en maitrisant ces points que l'on peut rechercher et proposer des solutions cohérentes à de nouveaux problèmes.

Vendredi 29 mars mars 2024 (2h + 2h)

Les étudiants choisissent entre le sujet 7 (niveau E3A) et le sujet 8 (plus difficile).

Sujet 7 : E3A PC 2016 mathématiques 2

Chapitres, notions à revoir :

- **Séries numériques :** tout (Séries géométriques ! ! !)
- **Intégration :** tout
- **Suites et séries de fonctions :** Théorème d'intégration terme à terme.
- **Séries entières :** développements de référence.

(E)/(D) à revoir :

- **(E1) - semaines 2 et 3 :** Nature des séries $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ et/ou $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2(n)}$.
- **(E1) - semaines 2 et 3 :** Nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ par comparaison à une intégrale.

Travail de préparation :

- Lire le rapport de Jury.

Rapport de jury :

Présentation du sujet :

L'épreuve est un problème divisé en trois parties ; le but des deux premières parties est de donner quatre expressions du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis, dans la troisième partie, d'étudier la vitesse de convergence de ces quatre séries en déterminant un équivalent de leur reste. Ce problème permettait d'utiliser une bonne partie du cours d'analyse ainsi que plusieurs techniques et exemples classiques : série harmonique alternée, intégrales de Wallis, intégrales de Dirichlet, transformation d'Abel, comparaison série-intégrale.

Partie 1

Une question de cours, une bonne moitié des candidats, seulement, connaissait le développement en série entière demandé à la question 1., le rayon de convergence étant alors souvent correct. Pour la question 2. il suffisait de penser à utiliser $x = -1/2$ ce qui n'a pas éte souvent perçu. Ce résultat ayant d'ailleurs généré des propositions inexactes à la question précédente. Pour le calcul du rayon de convergence de la question 3., les candidats ont pensé, en général, à utiliser la règle de d'Alembert ; pour le calcul de la somme, certains candidats pensent à utiliser soit un télescopage soit à primitiver le développement en série entière de $\ln(1-x)$, mais avec beaucoup de maladresses dans les calculs, un résultat final correct étant assez rare. A la question 4., on reconnait souvent une série alternée, mais certains affirment une convergence absolue. La majoration uniforme du module du reste en revanche n'est pas toujours justifiée et on ne sait pas en général l'utiliser pour calculer la limite en 1.

Partie 2

C'est la partie la moins bien traitée. La formule de Stirling est correctement énoncée par un candidat sur deux ; la plupart des candidats cherchent à montrer la convergence de la série de terme général an en utilisant la règle de d'Alembert (qui ne marche pas ici) sans penser à utiliser un équivalent. Pour la question 2.a. la plupart des candidats pensent à faire une intégration par parties mais un grand nombre de candidats se trompent sur les primitives et dérivées des fonctions en jeu. A la question 3.a. les candidats ont confondu la convergence simple de la série de fonctions avec la convergence simple de la suite de fonctions. La technique de changement de variable est connue et souvent maitrisée mais le choix du changement de variable n'était pas toujours judicieux, lorsque celui-ci n'est pas donné explicitement il faut commencer par penser a un changement de variable affine.

Partie 3

Les deux calculs de somme de termes d'une suite géométrique de cette partie (1.a. et 2.a.) ont posé beaucoup de problèmes aux candidats. La transformation d'Abel (question 1.) était ici guidée, certains candidats arrivent au bout du calcul. La notion de négligeabilité (question (1.c.) n'est pas maîtrisée par les candidats. L'intégration par partie de la question 2.c. a été en général bien traitée mais l'équivalent de la question 2.d a posé plus de problème. À la question 3.b. un nombre satisfaisant de candidats reconnaissent la technique de comparaison série-intégrale. La dernière question du sujet est abordée dans de nombreuses copies, même faibles, les réponses données plus ou moins bien justifiées étant la plupart du temps correctes.

Commentaire général de l'épreuve

L'épreuve a été traitée par 2058 candidats. Les notes sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9,41 et un écart-type de 4,75. Le sujet n'étant pas trop long et les parties étant indépendantes, toutes les parties ont été abordées en revanche peu de questions ont été bien traitées par une majorité des candidats. Ceux ayant des bases solides d'analyse s'en sont bien sortis ce qui a donné de bonnes, voire très bonnes copies. Le bilan est cependant, en moyenne, plus mitigé et parfois décevant avec des faiblesses surprenantes sur des notions basiques d'analyse (par exemple sur les calculs de somme de termes d'une suite géométrique), on a pu ainsi observé un nombre important de notes faibles. Les correcteurs ont pu parfois constater que, pour traiter certaines questions, les candidats connaissent la méthode ou ont la bonne idée mais sont complètement bloqués dans la mise en oeuvre de celle-ci par en général des difficultés importantes dans les calculs. Les copies étaient dans l'ensemble bien présentées.

Conseils aux futurs candidats

- ne pas négliger certains chapitres du programme ; un candidat ayant, par exemple, fait l'impasse sur les séries, obtient nécessairement une mauvaise note sur une telle épreuve.

- s'entraîner à faire des calculs afin de de pas être bloqué dans la mise oeuvre d'une méthode ou technique.

- les correcteurs encouragent fortement la bonne présentation ainsi que la qualité de la rédaction des copies, un nombre de points non négligeable leur est consacré. Sont sanctionnées, par exemple, les copies mal présentées (soulignez vos résultats), les copies comportant trop de fautes d'orthographes ou bien celles dont la rédaction est trop elliptique.

Sujet 8 : Centrale MP 2021 mathématiques 1

Chapitres, notions à revoir :

- **Complexes :** tout
- **Polynômes :** tout

Travail de préparation :

- Lire le rapport de Jury.

Rapport de jury :

Présentation du sujet

Le sujet porte, comme son titre l'indique, sur les inégalités de Bernstein. Elles sont étudiées sous deux formes : l'inégalité de Bernstein sur les polynômes trigonométriques dans la partie I.

La preuve développée dans la partie I, initialement obtenue par Riesz, repose sur une formule d'interpolation qui permet d'exprimer la dérivée d'un polynôme trigonométrique en fonction d'un nombre fini de ses valeurs. En application de l'inégalité de Bernstein, la fin de la partie I montre le résultat analogue sur les polynômes algébriques, à savoir l'inégalité de Markov s'exprimant sous la forme $\|P'\|_{L^\infty(-1,1)} \leq (\deg P)^2\|P\|_{L^\infty(-1,1)}$pour tout polynôme algébrique.

Analyse globale des résultats

Le sujet est assez long pour couvrir un large spectre des points de la partie « analyse » du programme. Bien que les deux parties du sujet soient indépendantes et de longueurs équivalentes, la seconde partie du sujet a été beaucoup moins traitée. S'agissant des résultats, le jury considère que, pour la plupart, les candidats ont compris les questions posées et ont entamé des tentatives raisonnables (qui ont parfois été couronnées de succès). La première sous-partie du sujet porte sur un thème classique (à savoir les polynômes de Tchebychev) et a été globalement bien réussie. Elle a permis aux candidats de prendre confiance en eux dans l'appropriation du sujet. Les autres sous-parties comprennent essentiellement des blocs quasi-indépendants de questions abordables même si certaines questions étaient difficiles (Q14, Q27) voire très difficiles (Q30). S'il est vrai que certaines copies sautent bon nombre de questions, ce phénomène a semblé assez minoritaire vu la forme du sujet et l'agencement de ses questions. En outre, certaines copies ont montré une bonne maitrise des arguments d'analyse.

Signalons également que les notes d'un nombre trop important de copies (environ un dixième) ont subi un malus de présentation.

Mentionnons quelques difficultés rencontrées dans les copies et qui devraient être absentes :
- la nécessité d'invoquer un argument par récurrence double (ou forte) est parfois mal comprise (voir Q1 ci-dessous) ;
- les candidats n'ont parfois pas su factoriser des polynômes simples dont les racines sont données (Q9) ;
- certains candidats ont beaucoup de difficultés à manipuler des valeurs absolues, des modules de nombres complexes et des calculs algébriques sur des sommes finies (avec une attention particulière sur la gestion des indices) ;
Finissons par un aspect positif : le jury a été agréablement surpris de l'usage fait des formules d'Euler de cosinus et sinus dans certaines réponses (Q2, Q5).

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Q1. Question globalement bien traitée. Signalons qu'une argumentation par récurrence apparait souvent dans les premières questions de l'épreuve et qu'une rédaction nette est attendue :
- explication claire de la nature de la récurrence (simple ou forte). Un principe intermédiaire est celui de la récurrence d'ordre fini, disons d'ordre 2 dans le cas de la Q1 dans laquelle on a besoin des rangs n et $n+1$ (ou $n-1$ et n selon rédaction) ;
- explicitation d'une hypothèse de récurrence que l'on peut appeler $H(n)$ par exemple ;
- mention de l'initialisation, par exemple preuve de $H(0)$ et $H(1)$ dans le cas d'une récurrence double ;
- preuve de la récurrence, dans le cas d'une récurrence simple démonstration de $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+1)$, dans le cas d'une récurrence double démonstration de $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (H(n-1), H(n)) \Rightarrow H(n+1)$ et dans le cas d'une récurrence forte $\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall k \leq n, H(k)) \Rightarrow H(n+1)$.

Pour revenir à la question Q1 et à la preuve de l'égalité $\deg(T_n) =$, certaines copies mentionnent parfois la formule $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ en oubliant qu'elle n'est généralement vraie que si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

S'agissant de la preuve du fait que $(T_k)_{0 \leq k`n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, l'argument invoquant que $(T_k)$ est une famille échelonnée de polynômes (c'est-à-dire $\deg(T_k) = k$) devait être accompagné d'une comparaison entre la longueur de la famille $(T_k)_{0 \leq k`n}$ et la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$ (qui vaut $n+1$ et non n).

Q2. Question globalement bien traitée. Étant donné la forme de l'énoncé, le sujet amenait à faire une récurrence d'ordre 2 (ou forte) via la formule

$$\cos((n+2)\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)) - \cos(n\theta))$$

Cette dernière formule nécessite bien entendu un argument (sans quoi il est impossible au jury de vérifier que la formule de trigonométrie est bien comprise). Parmi les arguments les plus simples, on peut invoquer la formule de trigonométrie $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$. Signalons que certaines copies ont invoqué les formules d'Euler de cos afin de prouver facilement l'expression ci-dessus.

Q3. Question globalement bien traitée. Il s'agit d'une conséquence immédiate des deux précédentes questions. Mentionnons que le jury a tout de même partiellement valorisé les copies ayant tenté de développer un polynôme P dans la base canonique sans réussir à achever la preuve. Cet angle d'attaque ramène le problème à montrer que $\theta \longmapsto \cos^k(\theta)$ est un polynôme trigonométrique pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q4. Question globalement bien traitée. Sachant que la fonction cos : $\mathbb{R} \to [1, 1]$ est surjective, il s'agissait d'écrire

$$\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \Big| T_n(\cos(\theta)) \Big| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \Big| \cos(n\theta) \Big| = 1$$

Mentionnons quelques confusions avec la gestion de la valeur absolue et concernant la distinction borne supérieure et majorant.

5. Il s'agit de la première question difficile, elle est essentiellement bien traitée dans la moitié des copies. Pour la plupart, les preuves de l'indication, à savoir l'inégalité $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$, ont été faites par un argument de récurrence reposant sur les formules suivantes :

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\theta)| &= |\cos(\theta)\sin(n\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta)| \\ &\leq |\cos(\theta)||\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)||\cos(n\theta)| \\ &\leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \\ &\leq (n+1)|\sin(\theta)|. \end{aligned}$$

Signalons que certaines copies ont des difficultés à bien gérer la valeur absolue dans les inégalités précédentes.

En outre, le joli argument suivant (sans récurrence) reposant sur la factorisation explicite de $x^n - y^n$ par $x - y$ a été trouvé plusieurs fois :

$$2|\sin(n\theta)| = \left|e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right| = \underbrace{\left|e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right|}_{2|\sin(\theta)|}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\theta})^k(e^{-i\theta})^{n-1-k}\right| \leq 2|\sin(\theta)| \times n$$

car chaque terme $(e^{i\theta})^k(e^{-i\theta})^{n-1-k}$ est de module 1. Autrement dit, on a $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.

Revenons au cœur de la question : en dérivant la formule $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ par rapport à θ, on trouve $\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = n\sin(n\theta)$ mais beaucoup de candidats ont confondu la dérivée de $\theta \longmapsto T_n(\cos(\theta))$ avec $\theta \longmapsto T_n'(\cos(\theta))$, ce qui a amené à la formule fausse $|T_n'(\cos(\theta))| = n|\sin(n\theta)|$.

Pour les candidats ayant obtenu la formule juste $T_n'(\cos(\theta)) = \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ (pourvu que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$), il fallait encore établir $|T_n'(\cos(\theta))| \leq n^2$ (conséquence évidente de l'indication) et prouver l'optimalité de cette inégalité. Les deux arguments les plus fréquents pour l'optimalité ont été :

- une bonne gestion de la limite $\theta \to 0$;
- ou encore une preuve plus longue par récurrence de la formule $T_n'(1) = n^2$ (via les formules de récurrence $T_{n+2}'(1) = 2T_{n+1}(1) + 2T_{n+1}'(1) - T_n'(1)$ et $T_n(1) = 1$).

Signalons que certaines copies ont tenté de prouver directement la majoration $|T_n'(x)| \leq n^2$ par récurrence pour un nombre quelconque $x \in [-1, 1]$.

Q6. Moins de la moitié des copies présentent des réponses satisfaisantes. Voici les trois approches les plus couronnées de succès :

- justifier que les deux membres sont deux polynômes de degrés strictement inférieurs à $2n$ et qui coïncident en $2n$ points distincts. Le cours assure alors l'égalité escomptée ;
- invoquer une décomposition en éléments simples de $\frac{B}{A}$ où chaque pôle est simple (rappelons que valeur du coefficient de $\dfrac{1}{X - \alpha_k}$, à savoir $\frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)}$, pouvait être utilisée sans justification (en MP mas pas en PSI)) ;
- reconnaitre les polynômes d'interpolation de Lagrange (même si parfois le bon nombre de points, ici $2n$, n'a pas été bien injecté dans les formules classiques des polynômes d'interpolation de Lagrange).

Q7. Globalement bien traitée. Le seul point à remarquer est l'égalité $P_\lambda(1) = 0$

Q8. Globalement bien traitée. On pouvait s'en sortir par (au moins) deux chemins :

- sans doute la méthode la plus courte, on dérive $(X - 1)Q_\lambda(X) = P'(\lambda X) - P(X)$ et on évalue l'indéterminé X en 1. À ce propos, le jury déconseille fortement d'écrire $Q_\lambda(X - 1)$ pour signifier le produit de Q_λ par $X - 1$!
- une autre méthode pour laquelle il fallait être méticuleux, on souhaite faire tendre x vers 1 dans l'égalité

$$Q_\lambda(x) = \frac{P(\lambda x) - P(\lambda)}{x - 1}$$

La dérivation au sens complexe est hors programme et il est conseillé de restreindre x à un voisinage réel de 1. Et même sous cette restriction, il n'est pas clair que la limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{P(\lambda x) - P(\lambda)}{x - 1} = \lambda P'(\lambda)$$

soit dans le programme sans justification (mais le jury n'a bien entendu pas pénalisé cette formule tant elle est naturelle et surtout vraie !). Beaucoup de copies ont soigneusement contourné l'écueil de la dérivation (complexe ou réelle) en décomposant linéairement P dans la base canonique des monômes. Dans ce cas, tout se ramenait à traiter le cas particulier $P = X^k$ pour lequel des calculs très simples sont possibles.

Q9. Cette question a essentiellement été bien traitée dans la moitié des copies. Le jury a été un peu déçu par certaines rédactions car la factorisation de polynômes simples doit faire partie des compétences attendues. Les racines $2n$-ièmes de -1 sont les racines du polynôme $X^{2n} + 1$ et non celles du polynôme $X^{2n} - 1$. On pouvait :

- soit utiliser la factorisation de $X^{2n} - +1$ découlant du cours et en déduire celle de $X^{2n}+1$ via la formule $X^{2n}+1 = -\Big((X\exp(i\frac{\pi}{2n}))^{2n} - 1\Big)$.

- soit vérifier que les $2n$ supposées racines ω_k sont bien racines, qu'elles sont distinctes deux à deux et en déduire que les deux polynômes R et $\prod_{k=1}^{2n}(X-\omega_k)$ (de même degré) sont colinéaires (et donc égaux car unitaires). Sur ce point, la justification que les nombres ω_k sont bien distincts a parfois donné lieu à de faux arguments (la fonction exp n'est en effet pas injective sur $\mathbb{C}$ comme le montre l'égalité $e^{i0} = e^{2i\pi}$. Voici un point qui ne n'a pas été pénalisé mais que le jury conseille d'éviter : la lettre X a parfois été utilisée comme une inconnue dans l'équation $X^{2n}+1$ (ce fut d'ailleurs également le cas dans la question Q8). Traditionnellement, la lettre X est une indéterminée polynomiale et l'équation $X^{2n}+1=0$ est fausse si elle est comprise comme égalité dans $\mathbb{C}[X]$. La notation $\sqrt[n]{z}$ ne peut pas être utilisée pour désigner les racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Q10 et Q11. Ces questions ont globalement bien été traitées.

Q12. Cette question est facile sur le fond mathématique : on demande de prouver qu'une fonction polynomiale trigonométrique f peut être représentée sous la forme $f(\theta) = e^{-in\theta}U(e^{i\theta})$ avec $U \in \mathbb{C}[X]$. Le jury a été un peu déçu de constater que, pour plus de la moitié des copies, le problème était d'ordre rédactionnel. Ainsi, il paraissait assez clair que bon nombre de candidats avaient compris comment résoudre cette question mais leur gestion du symbole $\sum$ (pourtant avec un nombre fini de termes) a été très problématique notamment sur les indices. Voici, par exemple, une preuve qui s'émancipe de la gestion du symbole $\sum$. On affirme qu'il suffit de trouver des polynômes $U_0, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

- $a_0 = e^{-in\theta}U_0(e^{i\theta})$
- $a_k\cos(k\theta) = e^{-in\theta}U_k(e^{i\theta})$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$
- $b_k\sin(k\theta) = e^{-in\theta}V_k(e^{i\theta})$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$

En effet, le polynôme $U = U_0 + \sum_{k=1}^{n}(U_k + V_k)$ conviendra par linéarité. On traite les trois cas précédents comme suit :

- on choisit $U_0 = a_0X^n$ si bien que l'on a bien le résultat voulu ;
- pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on écrit $a_k\cos(k\theta) = \frac{a_k}{2}e^{-in\theta}\left(e^{i(k+n)\theta} + e^{i(n-k)\theta}\right)$ si bien que $U_k = \dfrac{a_k}{2}(X^{k+n} + X^{n-k})$ convient (on a bien $\deg(U_k) \leq 2n$.
- le dernier cas se résout de même avec la formule eulérienne du sinus.

Q13. La plupart des copies gèrent de manière très satisfaisante la formule trigonométrique demandée. En particulier, la factorisation par « l'arc moitié », c'est-à-dire $1 - e^{i\theta} = -2e^{i\theta/2}\sin(\theta/2)$ est bien connue. La suite a posé plus de difficultés, à savoir la dérivation de $f(\theta) = e^{-in\theta}U(e^{i\theta})$ par rapport à θ.

Q14. On peut dire que c'est la première question délicate car qu'il fallait utiliser une formule qui apparait dans la preuve de la question Q11, à savoir $-2n^2 = \sum_{k=1}^{2n}\dfrac{\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$. Cette question est ainsi révélatrice des bonnes copies et a été bien traitée dans 25 % des copies.

Q15. Cette question a été globalement bien traitée. Signalons néanmoins quelques écueils :

- la dérivation de la fonction composée $\theta \longmapsto P\cos(\theta))$ pose parfois problème ;
- le nombre $\sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ ne vaut pas $\sin(\theta)$ en toute généralité mais $|\sin(\theta)|$ (selon les rédactions, ce point n'a pas été pénalisé car n'a pas d'impact dans la suite).

Q16. L'indication a été bien traitée dans moins de 25 % des copies. On veut prouver que $\theta \longmapsto Q\cos(\theta))\sin(\theta)$ est une fonction polynomiale trigonométrique de « degré » inférieur ou égal à n pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Voici deux moyens de procéder :

- on commence par fixer $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P' = Q$ puis l'on constate que $Q\cos(\theta))\sin(\theta) = \dfrac{d}{d\theta}(-P(\cos(\theta)).$ Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{S}_n$ est stable par dérivation et cela se vérifie immédiatement par la définition d'un polynôme trigonométrique (à noter qu'il n'y a pas perte de « degré » par dérivation) ;

- en invoquant la question Q1, il suffit de prouver que $\theta \longmapsto T_k(\cos(\theta))\sin(\theta)$ appartient à $\mathcal{S}_n$ pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Il ne reste plus qu'à utiliser les formules de trigonométrie classiques pour linéariser $\cos(k\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin((k+1)\theta) - \frac{1}{2}\sin((k-1)\theta)$.

Q17. Moins d'un quart des réponses ont été satisfaisantes. Dans de nombreuses copies, il est affirmé que $x \longmapsto xt$ est une bijection de l'ensemble $[0,1]$ dans lui-même pour tout paramètre $t \in [-1,1]$. En fait, le point délicat était de remarquer que l'on a $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-(xt)^2}$ pour tout $t \in [-1,1]$ et $x \in [0,1]$.

Q18. Moins d'un quart des réponses ont été satisfaisantes. Il s'agissait de combiner Q15 et Q17. Il n'y avait aucune difficulté particulière (hormis d'écrire les deux inégalités dans le bon ordre !).

Q19. Étant donné le sujet, la réponse attendue était un rappel des propriétés vérifiées par les polynômes de Tchebychev (Q4 et Q5). Mais le jury a bien entendu validé tous les points pour la réponse expéditive « $P = 0$ » (puisque la question n'imposait pas la non-nullité de P). La valeur de l'entier n étant fixée par l'énoncé, il ne s'agissait pas de trouver un cas d'égalité pour une valeur particulière de n mais pour toute valeur.

Conclusion :

Comme mentionné ci-dessus, le sujet est long mais les questions sont très abordables (sauf quelques questions difficiles) et parfaitement conformes aux exercices et cours étudiés dans le programme. Le sujet est clairement marqué « analyse » même s'il contient quelques questions d'algèbre linéaire ou ayant trait aux polynômes. On conseille aux candidats d'écrire soigneusement les arguments qui leur semblent suffisants pour conclure, de se rappeler qu'une réponse fait rarement une ligne, de tracer des allures de courbes, de lire une question intégralement (avec les indications) et de parcourir un peu les questions suivantes ! Enfin, mentionnons que le jury a valorisé les tentatives raisonnables de preuve (même si elles n'ont pas abouti).

Mardi 2 avril 2024 (2h+1h)

Toute la classe travaille sur le même sujet. Il est très long avec des choses très faciles au début et des choses plus difficiles à la fin.

Certains pourront, après la partie préliminaire et au moins un des exemples, passer à la partie III.

Sujet 9 :

Chapitres, notions à revoir :

- **Réduction :** tout
- **Probabilités :** Formule des probabilités totales, variables aléatoires (indépendance)
- **Espace vectoriel normé :** Limites de suites matricielles

Travail de préparation :

- Chercher au moins toute la partie Préliminaire et toute la question 1 de la partie I.

Rapport de jury (Parties IV, V, VI) :

Si on note avec plaisir la présence d'un nombre non négligeable d'excellentes copies, aussi bien du point de vue du contenu que de la rédaction, on ne peut que s'inquiéter du niveau trop faible de beaucoup d'autres. D'une manière générale, les résultats faibles semblent dus à un grand manque de maîtrise de l'algèbre linéaire et, plus prosaïquement, à un manque de maîtrise presque total du calcul.

Partie IV

Cette partie assez simple dans son début, a mis en évidence pas mal d'erreurs dans des calculs élémentaires. Si les questions A1, A2, A3 (Coefficients) sont plutôt bien traitées par la majorité des candidats, les questions C1, C2, C3 (Diagonale strictement dominante) ont finalement été peu abordées (environ 65 % des candidats n'obtiennent presque aucun point dans ces questions).

La première partie de cette question C1 est comprise en général mais on note parfois des calculs longs et inutiles qui donnent l'impression que le candidat avance à l'aveugle. Les candidats qui répondent correctement à la seconde partie cette question C1 réussissent également C2. La question C3 est comprise par une toute petite minorité de candidats et les calculs convaincants sont abordés dans moins de 1% des copies.

Quelques erreurs très fréquentes dans cette partie :

1. Dans C1 ((Diagonale strictement dominante), le rang de $A-I_n$ est souvent donné comme égal au rang de A_1-I_n sans aucune justification. Une utilisation fantaisiste et fréquente du théorème du rang ($\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{rg}(A-I_n) + \dim(\mathrm{Ker}(A-I_n))$ donne, par miracle, le résultat souhaité.
2. On trouve notamment dans ces questions des inégalités portant sur des matrices, des vecteurs...
3. Le module de la valeur propre disparaît régulièrement. On trouve encore trop souvent des inégalités entre nombres a priori complexes.

Partie V

La question A1 (Une suite de variables aléatoires) est abordée par une large majorité de candidats. Elle est bien traitée par la grande majorité d'entre eux, les autres écrivent 1/3 au lieu de 3/10 dans la matrice. Pour A2, l'unicité est trop rarement justifiée.

Dans B1 (Rapidité de convergence), le fait que la matrice soit symétrique réelle n'a pas toujours été cité. Concernant les calculs en B2, on note de grandes disparités parmi les candidats (aussi bien dans la qualité des calculs que dans l'utilisation de la calculatrice) et la question B3 conclusive de cette partie n'a été que très partiellement traitée. Dans cette question, fortement liée aux précédentes et assez rarement abordée, une toute petite minorité arrive à justifier le fait que la limite est indépendante de la loi initiale.

Partie IV

La question 1 est abordée par bien trop peu de candidats Beaucoup n'ont certainement pas pris le temps de lire le sujet. L'existence d'éléments de réponse à la (difficile) question 2 concerne au plus 1% des copies.

Des candidats ont noté qu'en admettant la question 2, la question 3 était facile. Beaucoup ont également réussi la 4 qui suivait. Une lecture complète de l'énoncé en début d'épreuve aurait sans doute permis à un plus grand nombre d'aborder ces questions relativement faciles et d'engranger ainsi quelques points.

Dans la question 5, peu abordée, on note des confusions entre les lignes et les colonnes dans les explications.

Mercredi 3 avril 2024 (2h)

Toute la classe travaille sur le même sujet.

Sujet 10 : Mines-Ponts PC 2017 maths 1

Chapitres, notions à revoir :

- **Variables aléatoires :** Formule des probabilités totales, indépendance.
- **Réduction :** Tout sauf la trigonalisation
- **Espaces vectoriels normés :** Normes, limites de suites vectorielles, continuité des applications, parties fermées, parties convexes

Travail de préparation :

- Lire le sujet et le rapport de Jury.
- Rédiger toute la partie 1 (Premiers pas).

Rapport de jury :
Ce sujet comportait beaucoup de questions simples et quelques questions délicates. Il est alors impératif de faire extrêmement attention à la rédaction : entre une moyenne et une bonne copie, la différence se joue parfois à ce qui peut apparaître comme des détails qui révèlent la compréhension ou entretiennent le doute (voir notamment les questions 4, 11 et 14).

Les copies sont majoritairement bien présentées. Rappelons que toute copie peu propre, difficilement lisible, ne met pas le correcteur dans de bonnes dispositions. Plus que tout, il vaut mieux ne rien écrire que d'asséner des assertions fumeuses auxquelles on sent que même le candidat ne croît pas. Le sujet a bien joué son rôle de tri, car l'écart type est conséquent, preuve d'un bon étalement des notes.

Q 1 : généralement bien traitée. Certains candidats ont mélangé les sens de passage et ont trouvé une mauvaise relation (un facteur 1/4 au lieu de 1/3)

Q 2 : là encore, généralement bien traitée. Les candidats qui ont écrit B au lieu de sa transposée se sont pénalisés pour la suite puisqu'ils ne pouvaient répondre correctement aux questions 3 et 4, même s'ils ont voulu le faire croire au correcteur.

Q 3 : beaucoup de temps perdu à calculer des espaces propres, alors qu'il suffisait de remarquer que la somme des coefficients sur chacune des colonnes valait 1 donc, que U était vecteur propre.

Q 4 : l'important n'était pas l'hérédité de la récurrence (triviale), mais bien son initialisation. Il fallait convaincre le correcteur que l'on avait bien vu la relation $X_0 = BX_0$.

Q 5 : de la même manière qu'un discours littéraire est interdit en algèbre ou en analyse, il faut en probabilités se garder des arguments pompeux tels que « la position au rang 1 dépend de celle au rang 0 donc les variables aléatoires ne sont pas indépendantes ». Certes l'indépendance mathématique est intuitivement basée sur l'indépendance des événements au sens phénoménologique du terme, mais le concept mathématique va beaucoup plus loin et pour prouver que des variables sont indépendantes, il y a un critère bien précis et c'est celui-ci qui doit être appliqué.

Les questions 6 à 10 sont celles qui ont été déterminantes dans le tri des candidats. Elles nécessitaient des compétences en algèbre qui, sans être très avancées, demandaient connaissance du cours et rigueur du raisonnement. Un correcteur ne met a priori pas de points négatifs, mais admettons que l'apparition de puissance de vecteurs, voire de sommes géométriques de vecteurs entraîne un fort sentiment négatif à l'égard du candidat qui ose les invoquer. Cela se répercute inéluctablement sur la note finale.

Q 11 : elle a permis à certains d'éviter le zéro. Encore fallait-il faire un raisonnement par équivalence correct, en tout cas non ambigu. Le correcteur doit décider si le candidat a perçu le besoin de l'équivalence, une rédaction telle que :

$$AU = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ don } AU = U \text{ équivaut à } A \text{ stochastique}$$

ne permet pas de conclure. Et le doute profite rarement au candidat !

Q 12 : généralement bien faite. Il ne fallait pas oublier de vérifier la positivité des coefficients d'un produit de matrices stochastiques.

Q 13 : Généralement, la question de la fermeture a été bien faite lorsqu'elle a été abordée. Le moyen le plus simple de prouver la fermeture était sans doute d'utiliser la caractérisation séquentielle. Signalons au passage que peu de candidats ont utilisé la caractérisation de la question 11 pour prouver la convexité ainsi que pour la question 12. C'est d'autant plus dommage, que cela économisait des calculs donc du temps et simplifiait la rédaction.

Q 14 : une question d'apparence simple, mais qui requérait de la précision dans la rédaction.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \times |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \times \|x\|_\infty = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \|x\|_\infty.$$

Cette rédaction permet de voir que le candidat a pensé aux valeurs absolues du début, a bien utilisé l'inégalité triangulaire, a bien majoré les x_j par la norme infinie de x, a bien utilisé la positivité des a_{ij} et enfin le fait que leur somme fasse 1. Tout ce qui ne permettait pas de déterminer que le candidat avait pensé à tous ces éléments, entraînait perte partielle ou totale de points.

Q 15 : l'idée est souvent là chez ceux qui ont abordé cette question (d'un autre côté, elle était suggérée), mais une rédaction trop imprécise en a pénalisé beaucoup.

Q 16 : un raisonnement classique d'algèbre par double inclusion. On ne pouvait pas appliquer 15 pour $p = 1$ puisque rien ne garantit que les coefficients de A soient tous strictement positifs, ce qui était l'un des points essentiels de la preuve de 15.

Q 17 : seule une poignée de candidats a pensé à utiliser la question 13 pour conclure. Les autres ont perdu du temps et des points. Les questions suivantes n'ont été que très peu abordées de manière correcte donc nous n'en parlerons pas. Notons toutefois une erreur commune dans la question 19 :
Le produit UL est une matrice stochastique de rang 1, de même que P, donc $P = UL$.

Jeudi 4 avril 2024 (3h)

Toute la classe travaille sur le même sujet.

Sujet 11 : CCP PC 2004 mathématiques 1

Chapitres, notions à revoir :

- **Algèbre linéaire :** déterminant
- **Espaces préhilbertiens réels :** tout (expressions en b.o.n., matrices orthonogonales, théorème spectral, matrices symétriques réelles (définies) positives)
- **Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien :** tout sauf les 2 derniers paragraphes (isométries du plan et de l'espace)

(E)/(D) à revoir :

- **(E1/E2) - semaines 17 et 18 :** Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est (défini) positif si et seulement si ses valeurs propres sont (strictement) positives.
  On pourra aussi demander la version matricielle.

Travail de préparation :

- Lire le sujet et le rapport de Jury.
- Rédiger les questions 1(a) et 1(b).

Rapport de jury :

L'épreuve de Mathematiques 1 de la session 2004 propose une étude des matrices de Hadamard.

La première partie est consacrée à l'obtention de l'inegalité de Hadamard sur les déterminants en utilisant les proprietés des determinants de Gram, la seconde partie etudiequelques proprieétés des matrices de Hadamard pour aboutir au resultat essentiel que l'ordre de ces matrices est necessairement soit 2, soit un multiple de 4.

Enfin dans une dernière partie, on cherche à estimer la borne superieure ´ d'une fonction à valeurs reelles définie sur l'ensemble des matrices de Hadamard d'ordre n.

De l'avis genéral des correcteurs, ce problème ne comporte pas de grandes difficultés, est d'une longueur raisonnable et semble bien adapté aux elèves de la filière PC. Quelques dizaines de candidats ont d'ailleurs abordé la totalité des questions, sans toutefois faire le plein des points à cause de quelques questions plus fines concernant les determinant de Gram, en particulier la question I.4 pour laquelle la fonction a été beaucoup trop souvent consideérée comme multilineaire. On notera que l'énoncé comportait une erreur en I.5.b où il fallait lire pour les conditions necessaires d'égalité :
« x_1 est orthogonal à L ou $(x_1, \dots, x_q)$ est liée » au lieu de « x_1 est orthogonal à L » puis « les vecteurs $x_1, \dots, x_q$ sont deux à deux orthogonaux ou l'un d'eux est nul »au lieu de « les vecteurs $x_1, \dots, x_q$ sont deux à deux orthogonaux ». Mais cette omission n'aété relevée par aucun candidat.

Les recommandations indiquées dans le rapport de la session 2003 n'ont guere été suivies d'effet, car on retrouve toujours un manque de soin et de rigueur dans la redaction et la presentation des copies : souvent les lignes d'equations se suivent sans explication ni lien logique entre elles, les quantificateurs sont souvent utilisés abusivement. Beaucoup trop de candidats ne maîtrisent pas les bases du raisonnement et particulierement les règles élémentairesde logique ; les confusions entre condition necessaire, condition suffisante et condition necessaire et suffisante ne sont pas rares. Le raisonnement par recurrence est mal maîtrisé et en tout cas souvent mal redigé : on rencontre des expressions telles que : par cascade descendante, il est immediat par recurrence, on voit que ça marche pour $n = 0$ et $n = 1$, donc ça marche pour tout n.

Beaucoup de questions qui sont des applications directes du cours ou faisant appel à des notions elémentaires sont trop souvent mal traitées. Il est navrant de constater que de nombreux candidats ne savent même pas traiter correctement les applications numériques. La toute première question du problème demandant de determiner une base du noyau d'une matrice carrée d'ordre 4 est révélatrice à ce sujet ; toutes les solutions imaginables ont été rencontrées : un noyau vide, des bases à un élément, à deux éléments, à trois éléments, à quatre éléments et même des bases contenant le vecteur nul ! La recherche d'une éventuelle inclusion entre deux ensembles montre à l'évidence que de nombreux candidats ne comprennent même pas le sens de la question.

Ces quelques reflexions tendent à montrer que mis à part un petit nombre de candidats d'un bon ou très bon niveau, la plupart n'ont assimilé de leur programme de classes preparatoiresque des resultats approximatifs et superficiels. Ceci conduit la grande majorité des candidats à grapiller des points question après question, sans avoir une vision synthetique du sujet ni une réflexion approfondie sur les liens pouvant exister entre les différentes questions ou parties du problème.

Vendredi 4 avril 2024 (2h)

Toute la classe travaille sur le même sujet.

Sujet 12 : CCINP PSI 2021 Problème 1

Chapitres, notions à revoir :

- **Séries entières :** Développement de $(1 + x)^\alpha$.
- **Variables aléatoires :** lois usuelles, indépendance, lemme des coalitions, espérance.

(E)/(D) à revoir :

- **(E2) - semaines 11 et 12 :** Soit $r \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall x \in]-1, 1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}} = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Travail de préparation :

- Lire le sujet et le rapport de Jury.
- Rédiger les question $Q9$ et $Q10$.

Rapport de jury :

REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

L'exercice couvre une part significative du programme d'analyse (intégration, séries entières, équations différentielles). Il aboutit à une expression explicite des coefficients du développement en série entière de la fonction de Bessel.

Le premier problème aborde la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ avec des questions d'analyse et de probabilités. La première partie consiste en une question de cours et application. La deuxième partie permet de calculer la probabilité de retour à l'origine de la particule lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini. La troisième partie mène au calcul du nombre moyen de passages à l'origine de la particule lorsque le nombre de pas tend vers l'infini, que la marche soit symétrique ou non.

Le second problème s'intéresse au comportement asymptotique de la suite des puissances itérées d'une matrice dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. La première partie est l'étude d'un cas particulier et fait appel aux connaissances portant sur la diagonalisation de matrices. La deuxième partie traite du cas où tous les éléments du spectre de la matrice sont de module strictement inférieur à 1. Cette partie commence par traiter le cas où la matrice est triangulaire supérieure et se poursuit par une étude qui permet de conclure dans la dernière question au cas d'une matrice quelconque en utilisant la propriété de trigonalisabilité des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Enfin, la troisième partie est une application à l'étude d'une méthode numérique dite de Gauss Seidel pour la résolution d'un système linéaire appliquée à une matrice à diagonale strictement dominante.

Commentaire général sur les copies

Les copies sont assez bien présentées dans l'ensemble, mais on regrette la présence trop importante de ratures et de surcharges ou encore d'abréviations qui nuisent à la lisibilité. Il est conseillé d'utiliser systématiquement un brouillon avant de se lancer dans la rédaction. On rappelle que les abréviations n'ont pas leur place dans une copie de concours. Notons également que l'honnêteté intellectuelle est évaluée dans les copies. En particulier dans les démonstrations où le résultat est donné dans l'énoncé, donner le résultat réellement obtenu peut permettre de gagner quelques points là où tenter le bluff pour tomber à tout prix sur le résultat de l'énoncé n'en vaudra aucun.

ANALYSE DÉTAILLÉE DES QUESTIONS (Problème 1)

Q9 : une question de cours plutôt bien réussie malgré quelques confusions avec les développements limités.

Q10 : il est arrivé de voir des réponses justes en application d'une question 9 fausse. Avoir le résultat sous les yeux donne trop souvent lieu à des calculs malhonnêtes.

Q11 : question assez bien traitée, l'erreur la plus courante étant l'oubli de préciser que les variables sont indépendantes avant de conclure à une loi binomiale.

Q12 : certains candidats n'appliquent pas les résultats précédents et tentent de retrouver une loi binomiale.

Q13 : la plupart des candidats pensent à utiliser la formule de Stirling mais certains se heurtent à des difficultés de calculs.

Q14 : question plutôt bien traitée malgré une mauvaise compréhension de la signification de l'indice n de la variable aléatoire T_n.

Q15 : certains candidats affirment par automatisme que le paramètre de la loi de Bernoulli est de nouveau égal à p alors que ce paramètre est le résultat d'un précédent calcul.

Q16 : lorsqu'elle est abordée, la question conduit souvent à des résultats corrects. Il fallait penser à justifier de pouvoir appliquer la question 10.

Q17 : question parfois traitée partiellement, la récurrence est plus ou moins bien menée jusqu'au bout.