



Programme de Colles

Semaine 9

du 27 novembre au 1er décembre

L'étudiant sera interrogé sur :

- un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
 - un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
 - un ou plusieurs exercices du cru du colleur.
-

Vade Mecum 2023-2024 : Thèmes 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 et 14.

Eléments propres, diagonalisation : révisions

Trigonalisation :

1. Définition : $u \in \mathcal{L}(E)$ et trigonalisable si il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.
2. CNS de trigonalisabilité (admise) : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.
3. Conséquences :
 - Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
 - La trace de A est la somme de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité) et le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité).
 - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n) = \lambda^n - \text{tr}(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$

Diagonalisation et polynômes annulateurs :

1. Définition d'un polynôme annulateur et premiers exemples.
2. Lien avec les valeurs propres : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ alors
 - Si $P(A) = 0$ alors : $\lambda \in \text{Sp}(A) \implies P(\lambda) = 0$ **(D1)**
 - Plus généralement : $\lambda \in \text{Sp}(A) \implies P(\lambda) \in \text{Sp}(P(A))$.Énoncé analogue pour les endomorphismes.
3. Théorème de Cayley-Hamilton.
4. Secondes CNS de diagonalisabilité : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence entre :
 - (1) u est diagonalisable (il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale)
 - (2) Le polynôme scindé à racines simples $P_0 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u .
 - (3) Il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u .
5. Conséquence : si u est diagonalisable, ses endomorphismes induits le sont aussi **(D2)**.

Applications de la réduction :

1. Calcul des puissances de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: soit à partir de la réduction, soit à partir d'un polynôme annulateur.
2. Résolution de systèmes différentiels (seul un cas diagonalisable a été vu en cours).
3. Résolution d'équations matricielles (exemples : recherche de commutants, recherche de racines de matrices)

Suites et séries numériques : révisions

Suites et séries de Fonctions :

1. Différents types de convergence :

- (a) Convergence simple (conservation de la monotonie, de la convexité par limite simple)
- (b) Norme infinie d'une fonction bornée sur un intervalle I (définition, démonstration **(D2)**).
Le nouveau programme autorise d'écrire directement $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ pour $A \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$.
- (c) Convergence uniforme, et convergence normale pour les séries de fonctions.
- (d) Procédés d'étude. Liens entre ces différentes notions. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout x .

Pour ce qui suit, uniquement des questions de cours (énoncés et **(E)**).

- 2. Continuité (pour les suites et séries de fonctions).
- 3. Théorème de double limite (a priori seulement pour les séries de fonctions).
- 4. Dérivation (pour les suites et séries de fonctions)

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$ et $\text{tr}(A) = 11$.

Calculer le polynôme caractéristique de A .

(E1) : Diagonaliser la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux-à-deux équivalentes.

1. A est nilpotente 3. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$

2. $\text{Sp}(A) = \{0\}$ 4. $A^n = 0$

(E1) : Application : calcul de puissances de matrices (en utilisant la réduction ou à l'aide d'un polynôme annulateur)

(E1) : On pose $\forall t \in [0, 1]$, $f_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{n}$. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

(E1) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergence uniformément sur \mathbb{R}^+ . On pourra utiliser la formule de Stirling.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$.

Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, A]$ puis sur \mathbb{R}^+ .

(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction zeta de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$,

montrer que ζ est de classe \mathcal{C}^1 sur D et exprimer $\zeta'(x)$ à l'aide d'une série.

Niveau 2 :

(E2) : Savoir trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qui a deux valeurs propres).

(E2) : Application : recherche de commutants.

(E2) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{n}$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{t^k}{k}$.

- Etudier la convergence simple de $\sum f_n$.
- Démontrer que pour tout $a \in]0, 1[$, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
- Démontrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.

(E2) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{n^2 x}{n^2 + x^2}$.

Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur un segment $[0, A] \subset \mathbb{R}^+$.

Y a-t-il convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ ?

(E2) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

Déterminer l'ensemble de définition D de f . Montrer que f est continue sur D et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Niveau 3 :

(E3) : Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors u et v diagonalisent dans une même base.

Remarques : « les endomorphismes induits d'un endomorphisme diagonalisable sont diagonalisables » est un résultat de cours.

(E3) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

En encadrant $f(x)$ par des intégrales, démontrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

(E3) : Énoncer le théorème de dérivation pour la limite f d'une suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démontrer que lorsque les hypothèses sont vérifiées, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment.

Semaine 10 : Réduction (toujours!) + Suites et séries de fonctions.