PSI 2022-2023
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 4

du 9 au 13 octobre

L'étudiant sera interrogé sur :
- un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
- un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
- un ou plusieurs exercices du cru du colleur.

Vade Mecum : Thèmes 2, 3, 6, 7, 8 et 9.

Convergence des intégrales impropres (ou généralisées) :

1. Intégrale impropre sur $]a,b]$ ou sur $[a,b[$. Convergence, divergence, exemples.
2. Intégrale faussement impropre (i.e cas où la fonction intégrée est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$).
3. Intégrales de références : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
4. Intégrale impropre sur $]a,b[$.
5. Propriétés : linéarité, relation de Chasles.
6. Précautions de calculs :
   - intégration par parties : on revient sur un segment ou on travaille directement avec l'intégrale impropre en précisant soigneusement l'existence des limites.
   - changement de variable : on se ramène sur un segment puis on passe à la limite ou on utilise le théorème de changement de variable pour une intégrale impropre (φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone).
7. Intégrales à valeurs dans $\mathbb{C}$: $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$ convergent.

Intégrales de fonctions positives :

1. Monotonie, si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et positive, alors $F : X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(t)dt$ est croissante.
   Deux cas possibles : F majorée ou $\displaystyle\lim_{X\to b} F(X) = +\infty$.
2. Théorèmes de comparaisons : Comparaison de la nature de $\displaystyle\int f$ et de $\displaystyle\int g$ dans les cas $f \leq g$ (et donc $f = o(g)$), $f = O(g)$ et $f \sim g$. Cas de convergence et de divergence.
3. Intégrale impropre absolument convergente. Absolument convergente $\Longrightarrow$ Convergente.
   Mais la réciproque est fausse. Intégrale semi-convergente.

Fonctions intégrables :

1. Fonctions intégrables (contient le caractère continu par morceaux), notation $\displaystyle\int_I f(t)dt$.
2. Adaptation des théorèmes de comparaisons.
3. Propriétés :
   - Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
   - Si f est intégrable sur I, alors elle l'est sur tout intervalle $J \subset I$.
   - Si f est **continue**, positive et intégrable sur I on a $\displaystyle\int_I f(t)dt = 0 \implies \forall t \in I,\ f(t) = 0$.

Intégrales dépendant d'un paramètre :

1. Cas où le paramètre est dans les bornes (y compris pour des intégrales impropres).
2. Théorème de continuité sous le signe $\int$ **(Admis)**. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.
3. Théorème de convergence dominée à paramètre continu **(Admis)**.
4. Théorème de dérivabilité ($\mathcal{C}^1$) sous le signe $\int$ **(Admis)**. Formule de Leibniz. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.
5. Dérivées d'ordres supérieurs.

Rappels sur les complexes :

1. Définitions (construction de $\mathbb{C}$ hors-programme), parties réelle et imaginaire, module, conjugué, propriétés.
2. Affixe d'un point, d'un vecteur, inégalité triangulaire, équation d'un cercle.
3. Nombres complexes de module 1 et trigonométrie, définition de $e^{i\theta}$, propriétés, formule de Moivre, formules d'Euler, méthode de l'arc moitié, application au calcul de sommes.
4. Forme trigonométrique, forme exponentielle d'un complexe non nul, argument, propriétés.
5. Racines n-ième de l'unité ou d'un complexe non nul, racines carrées (forme algébrique ou complexe), équations de degré 2.
6. Exponentielle complexe, définition, propriétés.
7. Nombres complexes et géométrie, condition portant sur les affixes pour que A, B, C soient alignés, ou pour que $(AB) \perp (AC)$. Translations, similitudes de centre 0 (le programme se limite là).
8. Applications aux autres chapitres : suites numériques complexes, fonctions complexes dérivables, équations différentielles, intégrales, primitives de fonctions complexes.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Calculs d'intégrales du type $\int P(x)e^{\alpha x}$ ($P(X)$ polynôme), $\int \cos(ax)e^{\alpha x}dx$, $\int \sin(ax)e^{\alpha x}dx$.
(E1) : Calculs d'intégrales de fractions rationnelles.
(E1) : Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
(E1) : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge, puis la calculer.
(E1) : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ est convergente, puis à l'aide d'un changement de variable, qu'elle vaut 0.
(E1) : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.
(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et démontrer que Γ est strictement positive.
(E1) : Soit $f : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ lorsque (et/ou au choix de l'examinateur) :
1. f est bornée.
2. f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On justifiera l'existence de l'intégrale.

(E1) : Représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$ soit imaginaire pur.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

(E1) : Résolution de $(\mathcal{E})$: $2\cos(t) - 3\sin(t) = 0$.

(E1) : Calculer les racines carrées de $Z = -7-24i$. En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$: $(12-3i)z^2 - 8iz + 32i = 0$.

Niveau 2 :

(E2) : Nature selon $x \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.

(E2) : Nature selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(t) dt$.

(E2) : Démontrer que la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0+\infty[$.

(E2) : Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on se donne deux points A et B.
Montrer (avec les complexes) qu'un point M appartient au cercle de diamètre $[A, B]$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

Niveau 3 :

(E3) : Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \mathrm{d}t$ diverge.

(E3) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{1+t} dt$.
Que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$? Déterminer de deux façons un équivalent u_n quand n tend vers $+\infty$.

(E3) : Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{(1+t^2)^2} dt$.
Justifier l'existence de $F(x)$ et déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0.

Semaine 5 : Intégrales à paramètre + Complexes + révisions d'algèbre linéaire.