PSI 2023-2024
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 21

du 18 au 22 mars

L'étudiant sera interrogé sur :
- un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
- un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
- un ou plusieurs exercices du cru du colleur.

Vade Mecum 2023-2024 : Tout.

Normes sur un espace vectoriel, Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie, Éléments de topologie : révisions

Etude locale d'une application :

On se limite toujours au cas de la dimension finie.

1. Limites, propriétés, indépendance du choix de la norme, caractérisation de la convergence à l'aide des fonctions coordonnées.
2. Continuité, opérations, caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées. Caractérisation séquentielle.
3. Si $f : E \longrightarrow F$ est continue, alors l'image réciproque d'un intervalle ouvert (resp. fermé) par f est un ouvert (resp. fermé).
4. Théorème des bornes atteints c'est-à-dire image continue d'une partie fermée bornée (toujours en dimension finie)
5. Applications lipschitziennes (définition, composition), lipschitzienne $\Longrightarrow$ continue.
6. Continuité des fonctions polynômiales, des applications linéaires (elles sont lipschitziennes en dimension finie), des applications multi-linéaires.

   Attention : la norme subordonnée n'est pas au programme, mais on peut l'aborder en exercices.

Équations différentielles : révisions autonomes

1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : $ay' + by = c$: définition, théorème de Cauchy-Lipschitz, interprétation graphique, structure des solutions, variation de la constante, raccordements des solutions.
2. Équations d'ordre 2 à coefficients constants (cf Vade Mécum). Recherche de solutions particulières quand le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$.
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : définition théorème de Cauchy-Lipschitz, structure des solutions (équation homogène ou pas). Exemple de recherche de solutions développable en série entière.

Rappels sur les fonctions numériques :

1. Limite, continuité : définition, caractérisation séquentielle.
2. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une application continue. Théorème de la bijection monotone. Image d'un segment par une application continue.
3. Dérivabilité. Dérivée de la bijection réciproque. Dérivée et extremum. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Théorème de la limite de la dérivée.
4. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Formule de Leibniz.

5. Formule de Taylor avec reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.
6. Convexité : définition, conséquences graphiques. Parmi les fonctions dérivables (resp. 2 fois dérivables) caractérisation des fonctions convexes. Inégalités à connaître.

   Remarque : L'inégalité de Jensen n'est pas au programme.

Fonctions vectorielles :

On s'intéresse ici aux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On pourra éventuellement adapter les énoncés aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Limite, continuité, caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
2. Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$. Caractérisations à l'aide des fonctions coordonnées. Dérivable en $a \implies$ continue en a.
3. Opérations sur les dérivées : linéarité, dérivée de $L \circ f$ avec $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, dérivée de $f \circ \varphi$ avec φ fonction à valeurs réelles, dérivée de $B(f, g)$ avec B bilinéaire (application au produit scalaire, au déterminant, au produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle)
4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Lien avec les fonctions coordonnées. Formule(s) de Leibniz.

Fonctions de plusieurs variables :

1. Ensemble de définition, applications partielles, continuité.
2. Dérivée selon la direction d'un vecteur non nul, dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, opérations.
3. Développement limié à l'ordre 1, application différentielle en un point, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.
4. Règle de la chaîne, application au changement de variable affine et au passage en coordnnées polaires. Exemple d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Trouver les fonctions puissances solutions de $(\mathcal{E}_0) : x^2y'' + xy' - y = 0$.
En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x^2y'' + xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

(E1) : On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.
Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

(E1) : Soit $f : [0, 1] \longmapsto [0, 1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

(E1) : Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

(E1) : Calculer de deux façons la dérivée $n-$ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$.

(E1) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

(E1) : On considère la fonction $h : \begin{cases} (x, y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \longmapsto 0 \end{cases}$

Montrer que les applications partielles de h en $(0, 0)$ sont continues en 0 mais que h n'est pas continue en $(0, 0)$.

(E1) : Etudier l'existence de dérivées partielles en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la fonction

$$g : \begin{cases} (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

(E1) : On considère l'application $f : x \in \mathbb{R}^p \longmapsto \|x\|_2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.
2. Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$, déterminer $df(a)$ et écrire en justifiant le développement limité à l'ordre 1 de f en a.

(E1) : Soit $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Déterminer un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_1 définie par :

$$\varphi_1 : \begin{cases} U_1 & \longrightarrow & V_1 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$$

est bijective. Exprimer φ_1^{-1}.

Niveau 2 :

(E2) : Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $xy'' + 2y' - xy = 0$.
Trouver les solutions f de $(\mathcal{E})$ développables en série entière au voisinage de 0 et telles que $f(0) = 1$, puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

(E2) : Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$ admet un minimum.

(E2) : Montrer qu'une fonction $f :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en 0 et en $+\infty$ est bornée.

(E2) : On considère le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$ et on pose $P_n = U_n^{(n)}$.
Démontrer que P_n possède n racines distinctes et qu'elles appartiennent à $]-1,1[$.

(E2) : Démontrer que pour tous $a, b \in]1, +\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

(E2) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
Exprimer les dérivées partielles de F en fonctions de celles de f.
En déduire la résolution sur $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$: $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Niveau 3 :

(E3) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(E3 - Inégalité de Jensen) : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Démontrer que :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \ \leq \ \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

(E3) : Soit $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leq 0\}$. Déterminer un ouvert U_2 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_2 définie par :

$$\varphi_2 : \begin{cases} U_2 & \longrightarrow & V_2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$$

est bijective et exprimer φ_2^{-1}.

Semaine 22 : Fonctions vectorielles + Fonctions de plusieurs variables.