PSI 2023-2024
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 20

du 11 au 15 mars

L'étudiant sera interrogé sur :
- un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
- un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
- un ou plusieurs exercices du cru du colleur.

Vade Mecum 2023-2024 : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Normes sur un espace vectoriel :

1. Norme, distance, norme associée à un produit scalaire (on donne celles issues des produits scalaires usuels).
2. Normes N_1 **(D1)**, N_2 et N_∞ **(D1)** sur $\mathbb{K}^p$.
3. Normes $\mathcal{N}_1$ **(D1)**, $\mathcal{N}_\infty$ **(D2)** sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
4. Normes équivalentes. Exemple en dimension infinie. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).
5. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Représentation des boules unités dans $\mathbb{R}^2$ avec les trois normes précédentes.
6. Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf en cas d'équivalence de normes.
7. Parties convexes.

Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie :

1. Définition, convergence.
2. Unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, limite des suites extraites, s.e.v. des suites convergentes.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf dans le cas où elles sont équivalentes.
3. En dimension finie, caractérisation à l'aide des suites coordonnées.

Éléments de topologie :

1. Parties ouvertes :
   (a) point intérieur, intérieur, partie ouverte.
   (b) Propriétés : l'intersection finie de parties ouvertes est ouverte, la réunion quelconque de parties ouvertes est ouverte.
2. Parties fermées :
   (a) point adhérent, caractérisation séquentielle.
   (b) adhérence, partie fermée, caractérisation séquentielle.
   (c) propriétés : l'intersection quelconque de parties fermées est fermée, la réunion finie de parties fermées est fermée.
3. Une partie est fermée si et seulement si son complémentaire est ouvert.
4. Frontière d'une partie.
5. Parties denses (définition et caractérisations).
6. Invariance de ces différentes notions par normes équivalentes.

Etude locale d'une application :

On se limite toujours au cas de la dimension finie.

1. Limites, propriétés, indépendance du choix de la norme, caractérisation de la convergence à l'aide des fonctions coordonnées.
2. Continuité, opérations, caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées. Caractérisation séquentielle.
3. Si $f : E \longrightarrow F$ est continue, alors l'image réciproque d'un intervalle ouvert (resp. fermé) par f est un ouvert (resp. fermé).
4. Théorème des bornes atteints c'est-à-dire image continue d'une partie fermée bornée (toujours en dimension finie)
5. Applications lipschitziennes (définition, composition), lipschitzienne $\Longrightarrow$ continue.
6. Continuité des fonctions polynômiales, des applications linéaires (elles sont lipschitziennes en dimension finie), des applications multi-linéaires.

   Attention : la norme subordonnée n'est pas au programme, mais on peut l'aborder en exercices.

Équations différentielles : révisions autonomes

1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : $ay' + by = c$: définition, théorème de Cauchy-Lipschitz, interprétation graphique, structure des solutions, variation de la constante, raccordements des solutions.
2. Équations d'ordre 2 à coefficients constants (cf Vade Mécum). Recherche de solutions particulières quand le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$.
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : définition théorème de Cauchy-Lipschitz, structure des solutions (équation homogène ou pas). Exemple de recherche de solutions développable en série entière.

Rappels sur les fonctions numériques :

1. Limite, continuité : définition, caractérisation séquentielle.
2. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une application continue. Théorème de la bijection monotone. Image d'un segment par une application continue.
3. Dérivabilité. Dérivée de la bijection réciproque. Dérivée et extremum. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Théorème de la limite de la dérivée.
4. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Formule de Leibniz.
5. Formule de Taylor avec reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.
6. Convexité : définition, conséquences graphiques. Parmi les fonctions dérivables (resp. 2 fois dérivables) caractérisation des fonctions convexes. Inégalités à connaître.

   Remarque : L'inégalité de Jensen n'est pas au programme.

Exercices à connaître :

$\boxed{\textbf{Niveau 1 :}}$

(E1) : La boule $B(a,r)$ est une partie bornée.

(E1) : Trouver les fonctions puissances solutions de $(\mathcal{E}_0) : x^2y'' + xy' - y = 0$.
En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x^2y'' + xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

(E1) : On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.
Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

(E1) : Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

(E1) : Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

(E1) : Calculer de deux façons la dérivée $n-$ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

(E1) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

Niveau 2 :

(E2) : Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_\infty(x)$.

(E2) : La boule $\bar{B}(a, r)$ est une partie convexe.

(E2) : La boule $B(a, r)$ est une partie ouverte.

(E2) : On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle (la valeur absolue). Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(E2) : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n$ (2 méthodes proposées, la 3ème mardi).

(E2) : Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $xy'' + 2y' - xy = 0$.
Trouver les solutions f de $(\mathcal{E})$ développables en série entière au voisinage de 0 et telles que $f(0) = 1$, puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

(E2) : Soit $f : [0, 1] \longmapsto [0, 1]$ une application continue. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0, 1],\ f(x) = x\}$ admet un minimum.

(E2) : Montrer qu'une fonction $f :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en 0 et en $+\infty$ est bornée.

(E2) : On considère le polynôme $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et on pose $P_n = U_n^{(n)}$.
Démontrer que P_n possède n racines distinctes et qu'elles appartiennent à $]-1, 1[$.

(E2) : Démontrer que pour tous $a, b \in]1, +\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Niveau 3 :

(E3) : (long) On se donne une norme $X \longmapsto \|X\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on définit la fonction N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad N(A) = \sup_{\|X\|\leq 1} \|AX\|.$$

Justifier l'existence de $N(A)$ et montrer que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(E3) : Avec les notations précédentes, montrer aussi que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

(E3) : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme usuelle. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(E3) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(E3 - Inégalité de Jensen) : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Démontrer que :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \ \leq\ \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Semaine 21 :

Équations différentielles + Fonctions numériques et vectorielles + Fonctions de plusieurs variables (début).