Programme de Colles

Semaine 19

du 19 au 23 février

L'étudiant sera interrogé sur :
• un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
• un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
• un ou plusieurs exercices du cru du colleur.

Vade Mecum 2023-2024 : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien :

1. Isométrie vectorielle, matrice orthogonale : Révisions
2. Endomorphismes autoadjoint : Révisions
3. Orientation d'un espace euclidien. Dans un espace euclidien orienté de dimension 2, orientation d'une droite vectorielle par un vecteur normal. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, orientation d'un plan vectoriel par un vecteur normal. Déterminant en base orthonormée directe (interprétation en terme de surface ou de volume en dimension 2 et 3 respectivement).
4. Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3. Définition à l'aide d'une forme linéaire. Propriétés (la plupart ont été admises). Expression en base orthonormée directe. Application à la recherche des sous-espaces propres d'une matrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
5. Isométries vectorielles d'un plan euclidien. Description complète de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ **(D1)** et de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
6. Isométries vectorielles **directes** d'un espace euclidien de dimension 3. Recherche de l'axe (orienté) et de l'angle de la rotation quand E est orienté. Deux méthodes sont données.

Normes sur un espace vectoriel :

1. Norme, distance, norme associée à un produit scalaire (on donne celles issues des produits scalaires usuels).
2. Normes N_1 **(D1)**, N_2 et N_∞ **(D1)** sur $\mathbb{K}^p$.
3. Normes $\mathcal{N}_1$ **(D1)**, $\mathcal{N}_\infty$ **(D2)** sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
4. Normes équivalentes. Exemple en dimension infinie. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).
5. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Représentation des boules unités dans $\mathbb{R}^2$ avec les trois normes précédentes.
6. Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf en cas d'équivalence de normes.
7. Parties convexes.

Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie :

1. Définition, convergence.
2. Unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, limite des suites extraites, s.e.v. des suites convergentes.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf dans le cas où elles sont équivalentes.
3. En dimension finie, caractérisation à l'aide des suites coordonnées.

Éléments de topologie :

1. Parties ouvertes :
   (a) point intérieur, intérieur, partie ouverte.
   (b) Propriétés : l'intersection finie de parties ouvertes est ouverte, la réunion quelconque de parties ouvertes est ouverte.
2. Parties fermées :
   (a) point adhérent, caractérisation séquentielle.
   (b) adhérence, partie fermée, caractérisation séquentielle.
   (c) propriétés : l'intersection quelconque de parties fermées est fermée, la réunion finie de parties fermées est fermée.
3. Une partie est fermée si et seulement si son complémentaire est ouvert.
4. Frontière d'une partie.
5. Parties denses (définition et caractérisations).
6. Invariance de ces différentes notions par normes équivalentes.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.

(E1) : Savoir diagonaliser une matrice symétrique réelle 3×3 en base orthonormée.

(E1) : Savoir donner les éléments caractéristiques (axe orienté, angle) d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice dans la base canonique (b.o.n.d).

(E1) : La boule $B(a, r)$ est une partie bornée.

Niveau 2 :

(E2) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.

(E2) : Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_\infty(x)$.

(E2) : La boule $\bar{B}(a, r)$ est une partie convexe.

(E2) : La boule $B(a, r)$ est une partie ouverte.

(E2) : On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle (la valeur absolue). Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(E2) : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$ (2 méthodes proposées, la 3ème mardi).

Niveau 3 :

(E3) : On note $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ les normes usuelles sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{N}_2$ domine $\mathcal{N}_1$, que $\mathcal{N}_\infty$ domine $\mathcal{N}_2$ mais que $\mathcal{N}_1$ ne domine pas $\mathcal{N}_\infty$.

(E3) : (long) On se donne une norme $X \longmapsto \|X\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on définit la fonction N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad N(A) = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|.$$

Justifier l'existence de $N(A)$ et montrer que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(E3) : Avec les notations précédentes, montrer aussi que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

(E3) : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme usuelle. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Semaine 20 : Espaces vectoriels normés + Équations différentielles + Révisions en autonomie d'analyse de première année.