Programme de Colles

Semaine 17

du 5 au 9 février

L'étudiant sera interrogé sur :
- un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
- un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
- un ou plusieurs exercices du cru du colleur.

Vade Mecum 2023-2024 : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Espaces préhilbertiens réels :

1. Produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples à connaître : produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz **(D1)**.
3. Inégalité de Minkowski, norme associée à un produit scalaire.
4. Identités de polarisation.
5. Orthogonalité :
   (a) Vecteurs unitaires, familles orthogonales, orthonormales, une famille orthogonale dont les vecteurs sont tous non nuls est libre **(D2)**.
   (b) Théorème de Pythagore pour la somme de 2 vecteurs (réciproque).
   (c) Sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'une partie A (noté $A^\perp$), c'est un s.e.v. de E, propriétés :

   i. $E^\perp = \{0\}, \{0\}^\perp = E$ *iii.* $F \cap F^\perp = \{0\}$

   ii. $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ *iv.* $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$
6. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
7. Espaces euclidiens :
   (a) Définition, bases orthonormales, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, Théorème de la base orthonormée incomplète.
   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E.
   Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ on pose $X = \mathcal{M}_\mathcal{B}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_\mathcal{B}(y)$. On a alors :
   $$x_i = (e_i|x) \quad \text{et donc} \quad x = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i.$$
   $$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tX.Y \quad \text{et donc} \quad ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^tX.X$$
   (c) Formes linéaires en dimension finie : $\forall f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}),\ \exists! a \in E,\ \forall y \in E, \quad f(y) = (a|y)$.
   Expression en base orthonormée.

Distance à un s.e.v. de dimension finie :

1. Pour qu'un vecteur de E soit un élément de $F^\perp$ il faut et il suffit qu'il soit orthogonal aux vecteurs d'une famille génératrice de F.
2. Soit F un s.e.v. de E, si F est de dimension finie alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ **(D2)**.
   Conséquence : si E est de dimension finie, alors pour tout s.e.v. F de E,
   on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.
3. Projection orthogonale : définition. Si p est la projection orthogonale sur F on a
   $$y = p(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in F \\ \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$
   Expression de $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$ si l'on dispose d'une b.o.n. $(e_1, \ldots, e_p)$ de F. Symétrie orthogonale.
4. Interprétation de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à l'aide de projetés orthogonaux.
5. Distance à un s.e.v. de dimension finie. Définition.
   Si p est la projection orthogonale sur F alors pour tout $u \in E$ on a :
   (a) $d(u, F) = ||u - p(u)||$,
   (b) $p(u)$ est le seul vecteur v de F tel que $||u - v||$ réalise la distance de u à F,
   (c) $||u||^2 = ||p(u)||^2 + d(u, F)^2$.
6. Inégalité de Bessel.
7. Vecteur normal à un hyperplan. Distance à un hyperplan dans un espace euclidien.
   Les étudiant doivent savoir **sans hésiter** déterminer la distance d'un vecteur à un plan dans $\mathbb{R}^3$. Plusieurs méthodes ont été proposées.

Réduction : révisions

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien :

1. Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition (endomorphisme qui conserve la norme), caractérisations, groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. Si F est stable par $f \in \mathcal{O}(E)$ alors $F^\perp$ l'est aussi **(D3)**.
2. Matrice orthogonale : définition ($M^T M = I_n$), caractérisations.
   Interprétations : Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E. On a les propositions suivantes.
   - Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E : $\quad \mathcal{B}'$ base orthonormée de $E \quad \Longleftrightarrow \quad P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   - Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$: $\quad u \in \mathcal{O}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminant d'un automorphisme (d'une matrice) orthogonal(e), isométries vectorielles directes.
4. Endomorphismes autoadjoint : définition, exemples, matrice dans une base orthonormée.
   Les valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint (resp. d'une matrice symétrique réelle) sont réelles **(D2)**.
   Théorèmes spectral : les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont supplémentaires orthogonaux, diagonalisation en b.o.n., version matricielle.
5. Endomorphismes autoadjoint positifs (resp définis positifs) : définition par le produit scalaire.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (définition et démonstration).
(E1) : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (définition et démonstration).
(E1) : Dans l'espace affine $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'équation du plan passant par $A(1,2,0)$ et orthogonal à $\vec{n}=(1,-1,2)$.
(E1) : Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E euclidien et $f\in\mathcal{L}(E)$.
Montrer l'égalité $\operatorname{tr}(f)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle f(e_i),e_i\rangle$.
(E1) : Savoir orthonormaliser une base de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire usuel.
(E1) : Savoir trouver rapidement une distance d'un vecteur à un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
(E1) : Savoir trouver rapidement un projeté orthogonal sur un plan de $\mathbb{R}^3$, ou encore la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
(E1) : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.
(E1) : Les symétries orthogonales sont des endomorphismes autoadjoint.
(E1) : Si $u\in\mathcal{S}(E)$ et si λ,μ sont des valeurs propres distinctes de u alors $E_\lambda(u)\perp E_\mu(u)$.
(E1) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.
(E1) : Savoir diagonaliser une matrice symétrique réelle 3×3 en base orthonormée.

Niveau 2 :

(E2) : Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que si pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\operatorname{tr}(AM)=\operatorname{tr}(BM)$ alors $A=B$.
(E2) : Soient $a_0,a_1,\dots,a_n$ des réels distincts deux-à-deux.
Pour tout $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrer que la base de Lagrange associée à $a_0,a_1,\dots,a_n$ est une base orthonormée de $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle\ ,\ \rangle$.
3. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

(E2) : Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On oriente E par la base $\mathcal{B}$.
Montrer que pour toute autre base orthonormée **directe** $\mathcal{B}'$, on a $\det_{\mathcal{B}}=\det_{\mathcal{B}'}$.
(E2) : Soit $p\in\mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff \begin{cases} p\circ p=p \\ \text{ et} \\ p \text{ est un endomorphisme autoadjoint}\end{cases}$$

(E2) : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par u alors $F^\perp$ l'est aussi.
(E2) : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de u répétées avec multiplicités et rangées dans l'ordre croissant. Démontrer que :

$$\forall x\in E,\quad \lambda_1\|x\|\leq\langle u(x),x\rangle\leq\lambda_n\|x\|.$$

(E2) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
On pourra aussi demander la version matricielle.

Niveau 3 :

(E3) : Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire et déterminer une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P(\alpha)$.
   Justifier qu'il s'agit d'une forme linéaire et déterminer l'unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel on a :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = \langle Q, P\rangle.$$

(E3) : Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de P alors $|\lambda| = 1$.

Semaine 18 : Révisions d'algèbre linéaire (réduction) + Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (tout)