Programme de Colles

Semaine 15

du 22 au 26 janvier

L'étudiant sera interrogé sur :
- un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
- un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
- un ou plusieurs exercices du cru du colleur.

Vade Mecum 2023-2024 : Thèmes 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 et 15.

Probabilités : révisions

Variables aléatoires :

1. Définitions, lois, exemples, couples et vecteurs : révisions.
2. Espérance :
   (a) Espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs positives : les calculs sont autorisés dans $[0, +\infty]$ et dans ce cas, on dit que X est d'espérance finie si $\mathbb{E}(X) < +\infty$, ou encore si $\{x\mathbb{P}(X = x),\ x \in X(\Omega)\}$ est sommable.
   (b) Espérance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   (c) Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \in [0, +\infty]$
   (d) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe, variable aléatoire centrée.
   (e) Théorème du transfert.
   (f) Propriétés : linéarité, positivité, croissance, espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.
   (g) Définie positivité :
   $\Big(X \geq 0 \text{ et } \mathbb{E}(X) = 0\Big) \implies \mathbb{P}(X = 0) = 1$ (l'événement $(X = 0)$ est presque sûr).
3. Variance :
   (a) Variable admettant un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi.
   (b) Inégalité de Cauchy-Schwarz **(D3)** : X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY aussi et
   $$\mathbb{E}^2(XY) \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$
   Cas d'égalité.
   (c) Variance, formule d'Huyghens-König, interprétation, loi réduite, propriétés.
   (d) Variance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   (e) Covariance (définition, propriétés).
   (f) Variance d'une somme finie de variables aléatoires discrètes.
4. Convergence et approximations :
   (a) Inégalités de Markov.
   (b) Inégalité de Bienaymé-Tchébichev.
   (c) Loi faible des grands nombres.

5. Fonction génératrice d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$:
   (a) Définition, propriétés : $R \geq 1$, valeur en 1, continuité (au moins) sur $[-1, 1]$, classe $\mathcal{C}^\infty$ (au moins) sur $]-1, 1[$, expression de $\mathbb{P}(X = x)$ à l'aide des dérivées successives.
   (b) Fonction génératrice des lois usuelles (à savoir retrouver rapidement).
   (c) Lien avec l'espérance : X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 **(D3)**.
   (d) Lien avec la variance : seulement en exercice (pas d'énoncé au programme).
   (e) Fonction génératrice de la somme de variables aléatoires indépendantes. On retrouve la loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, ou $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Déterminer l'espérance de $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
(E1) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov.

Niveau 2 :

(E2) : Soit X une variable aléatoire discrète réelle (ou complexe) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si X admet un moment d'ordre $r \geq 2$, alors elle admet un moment d'ordre s pour tout $s \in \{1, \ldots, r\}$.
(E2) : Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ deux-à-deux indépendantes et suivant une même loi. On suppose que les X_i^2 sont d'espérance finie et on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad m = \mathbb{E}(X_1) \text{ et } \sigma = \sigma(X_1)$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Niveau 3 :

(E3) : Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X est d'espérance finie. Démontrer que $\lim_{N \to +\infty} (N+1)\mathbb{P}(X \geq N+1) = 0$, et retrouver la deuxième expression de $E(X)$.
(E3) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov en utilisant une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$.

Semaine 16 : Variables aléatoires + Espace préhilibertiens réels.