PSI 2023-2024
Lycée Châtelet

Programme de Colles

Semaine 11

du 11 au 15 décembre

L'étudiant sera interrogé sur :
• un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
• un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
• un ou plusieurs exercices du cru du colleur.

Vade Mecum 2023-2024 : Thèmes 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 et 14.

Suites et séries de Fonctions :

1. Différents types de convergence : révisions
2. Continuité, double limite et dérivation : en exercice.
3. Intégration sur un segment en cas de convergence uniforme (pour les suites et séries de fonctions).
4. Intégration sur un intervalle quelconque :
   (a) Théorème de convergence dominée pour les suites et pour les séries de fonctions
   (b) Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

Intégration : révisions (tout sauf intégrales à paramètre x)

Séries entières, généralités :

1. Définition, ensemble de définition, séries géométriques.
2. Rayon de convergence : lemme d'Abel **(D2)**, définition (théorème) du rayon. Disque (ouvert) de convergence, cercle d'incertitude.
3. Règles pour déterminer le rayon de convergence.
   - utilisation du lemme d'Abel et de la définition de R.
   - règle de d'Alembert pour les séries entières ou pour les séries numériques.
   - théorèmes de comparaisons pour les séries entières.
4. Opérations sur les séries entières.
   (a) Somme ($R \geq \inf(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$).
   (b) Produit de Cauchy ($R \geq \inf(R_a, R_b)$). Application : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

Somme d'une série entière de la variable réelle :

1. Convergence normale sur tout $[-r, r] \subset]-R, R[$, sur tout segment.
2. Continuité sur $]-R, R[$.
3. Etude de la continuité en R (raisonnements à rédiger) :
   (a) Cas où la série converge absolument en R : convergence normale et donc continuité sur $[-R, R]$.
   (b) Cas où la série est alternée en R : convergence uniforme et donc continuité sur $[0, R]$.
4. Dérivation et « primitivation » terme à terme :
   (a) Les séries dérivée et intégrée ont même rayon de convergence.
   (b) Dérivation terme à terme sur $]-R, R[$.
   (c) Intégration terme à terme (ou plutôt primitives) sur $]-R, R[$. Application aux séries géométriques.
   (d) Caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Dérivées successives, expression (et donc unicité) des coefficients en fonctions des dérivées successives.

5. Fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ (ou « au voisinage de 0 »).
6. Série de Taylor associée à f qui est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Rappels : formules de Taylor. Application : développement en SE de exp.
7. Autres développements : $\mathrm{ch}(x), \mathrm{sh}(x), \cos(x), \sin(x), \dfrac{1}{1+x}, \dfrac{1}{1-x}, \ln(1+x), \ln(1-x)$, $\mathrm{Arctan}(x)$ et $(1+x)^\alpha$
8. Cohérence entre les deux définitions de $\exp(z) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) très court : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$.

(E1) : Un des deux **(E2*)** au choix de l'étudiant

(E1) : Calculer de plusieurs méthodes (au moins 3) le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n}$.

(E1) : Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n} z^{2n}$.

(E1) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^{2n}$.

(E1) : Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f = \sum n^2 t^n$.

(E1) : Prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ et montrer que la fonction f obtenue est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

Niveau 2 :

(E2) : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

(E2*) : Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(\pi + t)dt$.

(E2*) : Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt$.

(E2) : Démontrer que $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

(E2) : Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

(E2) : Soit $r \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}} = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Niveau 3 :

(E3) : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$.
En admettant le théorème de Weierstrass, démontrer que f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

(E3) : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{a}{1-x}$.

Semaine 12 : Séries entières + Probabilités (début).