



Programme de Colles

Semaine 1

du 18 au 22 septembre

L'étudiant sera interrogé sur :

- un énoncé de cours ou un point du Vade Mecum.
 - un **(E)** ou un **(D)** (pas les deux)
 - un ou plusieurs exercices du cru du colleur.
-

Vade Mecum : Thèmes 3, 6 et 8.

Rappels sur les polynômes : révisions en autonomie !

1. Loi usuelles : $.$, $+$, $\times$, $\circ$
2. Degré : définition, propriétés.
3. Multiples et diviseurs.
4. Dérivation, formule de Taylor.
5. Racines : définition, multiplicité, relations coefficients/racines (pas de formule générale au programme).
6. Décomposition en produits de facteurs irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$).

Rappels sur les suites :

1. Rappels sur la borne supérieure (ou inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ (définition, condition existence, convention $\sup(A) = +\infty$ quand A n'est pas majorée)
2. Suites réelles ou complexes (limites, monotonies, th. d'existence de limite,...), suites adjacentes.
3. Toute suite convergente est bornée **(D1)**.
4. Le terme général d'une suite réelle qui converge vers $\ell > 0$ est strictement positif à partir d'un certain rang.
5. Limites, relations de comparaisons (être *dominé*, *équivalent*, *négligeable*).
6. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Suites arithmético-géométriques.
7. Suites définies par une relation $f(u_n) = u_{n+1}$: limites éventuelles quand f est continue **(D1)**, utilisation de l'inégalité des accroissements finis, monotonie :
 - étude du signe de $f(x) - x$,
 - si la fonction f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone **(D1 dans le cas $u_0 \leq u_1$)**.
8. Exemples de suites définies implicitement comme solution d'équation, ou comme intégrale, développements asymptotiques.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit $L \in]0, 1[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique vérifiant $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(E1) : Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

Niveau 2 :**Niveau 3 :**

(E3) : Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \alpha = \sup(A) & \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A, \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha. \end{cases}
 \end{aligned}$$

(E3) : Écrire avec les quantificateurs les définitions suivantes (a est un réel).

$$\begin{array}{ll}
 1. u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) & 4. f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \\
 2. u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n) & 5. f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x)) \\
 3. u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n) & 6. f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))
 \end{array}$$

(E3) : Énoncer et démontrer le théorème de Cesàro.

Semaine 2 : Polynômes + Suites numériques + Rappels et compléments sur les séries numériques.