Exercices de perfectionnement corrigés n°8

Calcul matriciel, déterminants

Exercice 1 (Mines-Ponts 2017- ❄❄❄)

On définit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ et :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^n)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que u est un isomorphisme et trouver la matrice U de u dans les bases canoniques.
2. Calculer, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $k \in [\![0, n]\!]$ la somme :

$$\sum_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km}.$$

3. En déduire U^{-1}.

Indications

1. C'est l'isomorphisme du cours (polynômes de Lagrange) avec $a_k = \omega^k$.
2 et 3. U^{-1} est la matrice de u^{-1} dans les bases canoniques.

Exercice 2 (Mines-Ponts 2019, Centrale PC 2022 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer que A est semblable à la matrice $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où $t_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec A. Montrer que B est un polynôme en A.

Indications

1. Prendre $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{n-1}X^0 \neq 0$ (il existe car $A^{n-1} \neq 0$).
Montrerait que $\mathcal{B} = (X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et écrire les formules de changement de base.

2. Démontrer d'abord le résultat pour une matrice B qui commute avec T. On calculera les puissances de T.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄❄)

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Montrer que les matrices A et B sont semblables.
2. Le résultats subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$?

Indications

1. Montrer que A et B sont semblables à une même matrice simple.

2. Trouver un exemple de deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses, mais qui ont des indices de nilpotence est différents (2 et 3).

Exercice 4 (IMT MP 2022 - ❄❄)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

1. A-t-on nécessairement $BA = 0$?
2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{tr}((A+B)^p) = \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p)$.
3. Déterminer une relation entre $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$.

Indications

1. Non. Trouver un exemple de matrice B non inversible et de matrice A telle que $\operatorname{Im}(A) \subset \operatorname{Ker}(B)$.

2. On obtient ce résultat en développant (attention A et B ne commutent pas) et en utisant les propriété de la trace. Tester sur les premières valeurs de p et faire une récurrence.

3. Il y a une inégalité puisque $\operatorname{Im}(B) \subset \operatorname{Ker}(A)$. Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.