Exercices de perfectionnement corrigés n°8

Calcul matriciel, déterminants

Solutions

Solution de l'exercice 1

1. L'application est linéaire (facile) et si P est dans son noyau alors il possède $n+1$ racines distinctes donc il est nul. La fin est à rédiger.

2. Si $P(X) = \sum_{q=0}^{n} a_q X^q \in \mathbb{C}_n[X]$ et si $k \in [\![0, n]\!]$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km} &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_q \omega^{qm}\omega^{-km} \\ &= \sum_{q=0}^{n} a_q \sum_{m=0}^{n} \omega^{(q-k)m} \end{aligned}$$

Or si $q-k \neq 0$ alors $\omega^{q-k} \neq 1$ (car $q-k \in [\![-n, n]\!]$) et donc :

$$\sum_{m=0}^{n} \omega^{(q-k)m} = \frac{1-\omega^{(n+1)(q-k)}}{1-\omega^{q-k}} = 0.$$

Il ne reste donc qu'un terme dans la somme :

$$\sum_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km} = a_k \sum_{m=0}^{n} \omega^0 = (n+1)a_k.$$

3. U^{-1} est la matrice de u^{-1} dans les bases canoniques. Et donc, en utilisant la question 2,

$$U^{-1} = \frac{1}{n+1}\overline{U}.$$

Solution de l'exercice 2

1. Classique. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{n-1}X^0 \neq 0$ (il existe car $A^{n-1} \neq 0$).
On montrerait que $\mathcal{B} = (X_0, AX_0, \ldots, A^{n-1}X_0)$ est libre (prendre une combinaiason linéaire qui fait 0 et appliquer A successivement), et comme elle est de cardinal $n = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On note P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
Les formules de changement de base donnent alors assez facilement :

$$P^{-1}AP = T,$$

où $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $t_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.

2. Il suffit de démontrer le résultat pour une matrice B qui commute avec T, les formules de changement de bases donneront alors le résultat demandé (à faire).

On montrerait que si B commute avec T alors elle est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = b_0 I_n + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots + b_{n-1} T^{n-1}.$$

Ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 3

1. On note $r = \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Puisque $A^2 = 0$, on a $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On montre que A et B sont semblables à une même matrice simple.
Idée 1 : Prendre un base $(Y_1, \dots, Y_r)$ de $\text{Im}(A)$ qui est contenu dans $\text{Ker}(A)$. On complète cette famille libre en une base de $\text{Ker}(A)$ (qui est de dimension $n-r$).

$$(Y_1, \dots, Y_r, X_{r+1}, \dots, X_{n-r}) \text{ base de } \text{Ker}(A).$$

Enfin, par définition, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ il existe X_i tel que $Y_j = AX_j$.
On considère alors la famille :

$$(Y_1, \dots, Y_r, X_{r+1}, \dots, X_{n-r}, X_1, \dots, X_r)$$

Elle est de cardinal $n - r + r = n$.
On montre assez facilement qu'elle est libre (prendre une combinaison linéaire et multiplier par A). Et donc c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Par les formules de changement de base, A est semblable à une matrice très simple avec un bloc I_r en haut à gauche et des 0 partout ailleurs.
Il en va de même pour B donc A et B sont semblables.
Idée 2 : On prend une base $X_{n-r+1}, \dots, X_n$ d'un supplémentaire de $\text{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On peut montrer (cf preuve du théorème du rang) que $X_1 = AX_{n-r+1}, \dots, X_r = AX_n$ forment une base de $\text{Im}(A)$.
On complète cette base en une base de $\text{Ker}(A)$ et on obtient ainsi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On retrouve la même matrice semblable à A que précédemment.

2. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient les hypothèses, mais $A^2 = 0$ et $B^2 \neq 0$ donc A et B ne sont pas semblables.

Solution de l'exercice 4

1. La réponse est non. On retiendra que $AB = 0$ si et seulement si $\text{Im}(B) \subset \text{Ker}(A)$ ou encore si et seulement si les colonnes de B sont dans la noyau de A.
Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Alors $AB = 0$ et pourtant $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$.

2. On montre par récurrence l'égalité suivante :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} B^k A^{p-k}.$$

Pour $p=1$, c'est immédiat. On l'écrit pour $p=2$. Puisque $AB=0$ on a :

$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+BA+B^2 = \sum_{k=0}^{2} B^k A^{p-k}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat démontré au rang p. On a alors :

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} &= (A+B)(A+B)^p &= A\sum_{k=0}^{p} B^k A^{p-k} + B\sum_{k=0}^{p} B^k A^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \underbrace{AB^k}_{=0 \text{ si } k\geq 1} A^{p-k} + \sum_{k=0}^{p} B^{k+1}A^{p-k} \\ & &= A^{p+1} + \sum_{j=1}^{p+1} B^j A^{p+1-j} = \sum_{j=0}^{p+1} B^j A^{p+1-j}\end{aligned}$$

Ce qu'on voulait.
Enfin, par propriété fondamentale de la trace, si $i,j \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{tr}(B^iA^j) = \mathrm{tr}(A^jB^i) = \mathrm{tr}(A^{j-1}ABB^{i-1}) = 0$. et par linéarité :

$$\mathrm{tr}((A+B)^p) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{tr}(B^kA^{p-k}) = \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p)$$

3. Puisque $AB=0$ on a $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$ et donc :

$$\mathrm{rg}(B) = \dim(\mathrm{Im}(B)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A).$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(B)+\mathrm{rg}(A) \leq n$.
Mais parfois l'inégalité est stricte.
Si $n \geq 3$, par exemple $n=3$. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB=0$ et pourtant : $\mathrm{rg}(B)+\mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$.
Pour $n=2$, il suffit aussi de prendre $B=0$ et A de rang 1.