# Exercices d'entraînement corrigés n° 8

**Calcul matriciel, déterminants**

## Exercice 1 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄)

Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $B^n = 0$ et que $AB = BA$.
Montrer que $A$ est inversible si et seulement si $A + B$ l'est.

**Indications**

Raisonner par double implication.
Si $A$ est inversible, on pourra utiliser la caractérisation de l'inversibilité de $A+B$ par son noyau qui doit être réduit à $\{0\}$.
La réciproque on peut appliquer ce qui précède avec des matrices bien choisies.

## Exercice 2 (TPE MP 2018 - ❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^3 = 0, AB = BA$ et $B$ inversible. Montrer que $A + B$ est inversible.

**Indications**

On pourra utiliser la caractérisation de l'inversibilité de $A+B$ par son noyau qui doit être réduit à $\{0\}$.
Utiliser le binôme de Newton pour calculer $(A + B)^k$ avec $k = 2$ et $k = 3$.

## Exercice 3 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Exprimer la matrice $P$ de la famille $(S_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $(S_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer $P^{-1}$.

**Indications**

Questions 1 et 2 : développer $(1 - X)^{n-k}$ à l'aide du binôme de Newton. La matrice obtenue est triangulaire inférieure.
Question 3 : pour trouver $P^{-1}$, exprimer $X^k$ dans la base $(S_0, \ldots, S_n)$.

## Exercice 4 (❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ en fonction de $A$ et de $I_3$.
2. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$.
3. Pour quelles valeurs de $\lambda$ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle non inversible ?
4. On pose $B = A - 2I_3$.
   (a) Calculer $B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En écrivant $A = B + 2I_3$, calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On exprimera $A^n$ en fonction de $I_3$ et de $B$.

**Indications**

Question 2 : revenir à la **définition** de matrice inversible.
Question 3 : utiliser la **caractérisation** de matrice inversible à l'aide du déterminant.
Question 4 : calculer les premières puissances pour deviner la réponse, puis la montrer soigneusement par récurrence.
Question 5 : C'est le binôme de Newton (ne pas oublier les hypothèses).

## Exercice 5 (CCP PSI 2016 - ❄)

Montrer que $f$, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa trace.

**Indications**

Question 1 : montrer la linéarité et ne pas oublier de montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ (les termes en $X^{n+1}$ s'éliminent).
Question 2 : écrire la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

## Exercice 6 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

1. Montrer que $f$ défini par $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$ est bijectif dès que $\mathrm{tr}(A) \neq -1$.
2. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = -1$.
   Donner $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
3. Résoudre l'équation $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ dont l'inconnue est la matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Indications**

Question 1 : pour la bijectivité, montrer que le noyau est réduit à $\{0\}$.
Question 2 : Montrer que le noyau est la droite vectorielle engendrée par $A$.
L'image est donc un hyperplan. Montrer que c'est le noyau de l'application trace (inclusion + argument de dimension).
Question 3 : distinguer les cas $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(A) \neq -1$.

## Exercice 7 (Formules de changement de base - ❄)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_2 + 4e_3, \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 - 2e_3, \\ f(e_3) &= -e_1 + e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

1. Ecrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base $(e'_1)$ de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.
3. Déterminer une base $(e'_2, e'3)$ de $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$.
4. Démontrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $E$.
5. Déterminer la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   Quelle est la relation entre $M$ et $D$ ?
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $M^n$.

**Indications**

Exercice basique à maîtriser. Premier pas vers le chapitre réduction.

## Exercice 8 (Formules de changement de base - ❉)

Dans $E=\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique et $f\in\mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$f(x,y,z)=(-2x+y+2z,-3x+2y+2z,-7x+3y+5z).$$

1. Ecrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base $(e_1')$ de $\mathrm{Ker}(f-3Id)$.
3. Déterminer une base $(e_2')$ de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.
4. On pose $e_3'=3e_1+2e_2+4e_3$.
   Démontrer que $\mathcal{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ est une base de $E$.
5. Calculer $f(e_3')$.
6. Déterminer la matrice $T$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   Quelle est la relation entre $M$ et $T$ ?
7. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $T^n$.

**Indications**

Exercice basique à maîtriser. Premier pas vers le chapitre réduction.

## Exercice 9 (❉❉)

Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}(u^2)\oplus\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2)\neq\mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de $u$ est : $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.
4. Déterminer les endomorphismes $v$ qui commutent avec $u$.

**Indications**

1. Déterminer d'abord $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u-2Id)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Écrire et exploiter les conditions pour que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ convienne et utiliser ce qui précède.
4. Travailler avec les matrices.

## Exercice 10 (❉❉)

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1, que $u^2\neq 0$ et que $u^3=0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)\subset\mathrm{Im}(u)$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2))=2$.
2. En déduire qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

**Indications**

1. On pourra montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ (inclusion + argument de dimension).
2. Prendre $e_3$ tel que $u^2(e_3) \neq 0$ et vérifier que $(u^2(e_3), u(e_3), e_3)$ convient.

**Exercice 11 (❉)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $u^2 = u \circ u = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Indications**

1. Utiliser les hypothèses et la formule du rang.
2. Écrire et exploiter les conditions pour que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ convienne et utiliser la question 1.

**Exercice 12 (Déterminant - ❉)**

Soient $a_1, \dots, a_n$ des complexes. On pose $m_{i,j} = 1 + a_i a_j$ et on considère la matrice $M = [m_{i,j}]_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$. Calculer le déterminant de $M$.

**Indications**

Ecrire les colonnes comme combinaison linéaires de 2 colonnes $U$ et $A$ fixées.
Les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont à distinguer dans le raisonnement.

**Exercice 13 (Mines-Ponts PC 2021 - ❉❉)**

Soient $a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \cdots & x \\ x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & a_n + x \end{vmatrix}$.

**Indications**

Revenir à la définition du déterminant d'une matrice, c'est-à-dire travailler sur les colonnes. On pourra introduire la colonne $U$ dont tous les coefficients valent 1.

**Exercice 14 (Déterminant - ❄❄)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$A = [a_{i,j}]_{i,j=1\cdots n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & a & \cdots & \cdots & a \\ b & b & \lambda_3 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & b & \cdots & \cdots & b & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1. On suppose d'abord que $a$ et $b$ sont distincts. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $D(x) = \det([a_{i,j} + x]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}})$.
   Montrer que $D$ est une fonction polynôme de degré $\leq 1$.
   En déduire $D(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis $\det(A)$.
2. Calculer $\det(A)$ lorsque $a = b$.

**Indications**

1. S'inspirer de la méthode de calcul d'un Vandermonde avec un polynôme.
Pour montrer qu'il est de degré $\leq 1$, faire des opérations sur les colonnes.
Pour connaître un polynôme de degré $\leq 1$, il suffit de connaître les valeurs qu'il prend en 2 points distincts...

2. Reprendre ce qui précède avec $b = t$ et faire tendre $t$ vers $a$. Utiliser un argument de continuité et faire apparaître un taux d'accroissement.

**Exercice 15 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)**

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. On pose :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Montrer que $\Delta \neq 0$ si et seulement si $x_1$ et $x_2$ sont distincts.

**Indications**

On pourra utiliser les mêmes opération que dans le calcul d'un déterminant de Vandermonde.

**Exercice 16 (CCP PC 2018 - ❄)**

Calculer le déterminant $n \times n$ : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 4 & 2 & & (0) \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

**Indications**

C'est quasiment le même que dans le cours.

**Exercice 17 (St-Cyr MP 2022 - ❄❄)**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(B) = 1$.
Montrer que $\det(A+B)\det(A-B) \leq \det(A)^2$.

**Indications**

Montrer d'abord que, puisque $B$ est de rang 1 elle est semblable à une matrice $B'$ dont toute les colonnes sauf la première sont nulles.
Démontrer le résultat pour $B' = P^{-1}BP$ et $A' = P^{-1}AP$, et l'obtenir pour $A$ et $B$ ensuite en utilisant les propriétés du déterminant.