Exercices d'entraînement corrigés n° 8

Calcul matriciel, déterminants

Solutions

Solution de l'exercice 1

Si A est inversible : Soit X vecteur colonne tel que $(A+B)X=0$. En utilisant les hypothèses :

$$B^{n-1}(A+B)X = B^{n-1}AX + B^nX = AB^{n-1}X + B^nX = 0$$

Donc $B^{n-1}X=0$ et de proche en proche $B^{n-2}X=\cdots=BX=0$ donc $AX=0$. Ainsi $X=0$ et $A+B$ est inversible.
Pour la réciproque, poser $A'=A+B$ et $B'=-B$ et appliquer ce qui précède.

Solution de l'exercice 2

On peut utiliser la formule du binôme de Newton car $AB=BA$.
$\boxed{\text{Soit } X \in \mathrm{Ker}(A+B). \text{ On veut montrer que } X=0.}$
On a $(A+B)^3X=0$ donc

$$(A^3+3A^2B+3B^2A+B^3)X = B(3A^2+3BA+B^2)X=0$$

et comme B est inversible : $(3A^2+3BA+B^2)X=0$.
On a aussi $(A+B)^2X=(A^2+2BA+B^2)X=0$. En éliminant A^2X entre les deux égalitées, on obtient :

$$(-3BA-2B^2)X=0.$$

Et comme B est inversible, $3AX+2BX=0$.
Enfin $(A+B)X=AX+BX=0$ donc $AX=BX=0$. Et comme B est inversible, $X=0$.
On a donc $\mathrm{Ker}(A+B)=\{0\}$ (matrice carrée) donc $\boxed{A+B \text{ est inversible.}}$

Solution de l'exercice 3

1. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. On a $S_k(X)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(-1)^jX^{k+j}$.

On pose $i=k+j$ dans cette somme : $S_k(X)=\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}(-1)^{i-k}X^i=\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{n-i}(-1)^{i-k}X^i$.

La matrice P de la famille $(S_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice carrée dont les $n+1$ colonnes sont les coordonnée de $S_0,\dots,S_n$ dans la base $(1,X,\dots,X^n)$. Avec la question 1, on obtient :

$$P=\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -\binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} & 0 & \cdots & 0\\ \binom{n}{2} & -\binom{n-1}{1} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ (-1)^n\binom{n}{n} & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{0}{0}\end{pmatrix}$$

2. La matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible. Par conséquent, $\boxed{(S_k)_{k\in\{0,\dots,n\}} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

3. L'inverse de P est la matrice de passage de $(1, X, \dots, X_n)$ à $(S_0, \dots, S_n)$. Et donc pour trouver P^{-1}, on exprime X^k dans la base $(S_0, \dots, S_n)$.
Pour cela, on remarque que $S_n(X) = X^n$ et que $1 = (X + (1 - X))$.
On écrit la formule du binôme de Newton :

$$1 = (X + (1-X))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k(X).$$

De même :

$$\begin{aligned} X &= X((X+(1-X))^{n-1} &= X\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-1-k} \\ & &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}X^j(1-X)^{n-j} &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}S_j(X) \end{aligned}$$

Ou plus généralement :

$$\begin{aligned} X^p &= X^p((X+(1-X))^{n-p} &= X^p\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}X^k(1-X)^{n-p-k} &= \sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}X^{k+p}(1-X)^{n-p-k} \\ & &= \sum_{j=p}^{n}\binom{n-p}{j-p}X^j(1-X)^{n-j} &= \sum_{j=p}^{n}\binom{n-p}{j-p}S_j(X) \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'écrire les coordonnées en colonne pour obtenir P^{-1}.

Solution de l'exercice 4

1. Le calcul donne facilement $\boxed{A^2 = 8A - 12I_3.}$
2. On a donc $8A - A^2 = 12I_3$ ou encore $A\left(\frac{2}{3}I_3 - \frac{1}{12}A\right) = \left(\frac{2}{3}I_3 - \frac{1}{12}A\right)A = I_3$.

   Par définition (à connaître) de matrice inversible : A est inversible et $A^{-1} = \frac{2}{3}I_3 - \frac{1}{12}A$.
3. Le calcul donne $\det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)^2(6-\lambda)$. En effet :

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} & L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} & \\ &= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} & C_2 \longleftarrow C_2 - C_1 \text{ et } C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \\ &= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda)^2 & \end{aligned}$$

Or $A-\lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\det(A-\lambda I_3)\neq 0$.

Et donc : $\boxed{A-\lambda I_3 \text{ est non inversible si et seulement si } \lambda=2 \text{ ou } \lambda=6.}$

4. On pose $B=A-2I_3$.

   (a) On a $B^2=4B, B^3=4B^2=4^2B$ et par récurrence $B^n=4^{n-1}B$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   (b) $A^n=(B+2I_3)^n$ avec B et $2I_3$ qui commutent. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n &= (B+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k2^{n-k} = 2^nI_3+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^{k-1}2^{n-k}B \\ &= 2^nI_3+2^{n-2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^kB = 2^nI_3+2^{n-2}((2+1)^n-1)B = 2^nI_3+\frac{1}{4}(6^n-2^n)B \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)(X)=\displaystyle\int_X^{X+1}P(t)dt$.
Par linéarité de l'intégrale, on a clairement pour tous $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(\lambda P+\mu Q)(X)=\int_X^{X+1}(\lambda P+\mu Q)(t)dt=\lambda\int_X^{X+1}P(t)dt+\mu\int_X^{X+1}Q(t)dt=\lambda\varphi(P)(X)+\mu\varphi(Q)(X).$$

Donc φ est linéaire.

D'autre part, si $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}\cdots+a_1X+a_0\in\mathbb{R}_n[X]$ alors en intégrant, on trouve

$$\varphi(P)(X)=\frac{a_n}{n+1}((X+1)^{n+1}-X^{n+1})+\frac{a_{n-1}}{n}((X+1)^n-X^n)+\cdots+\frac{a_1}{2}((X+1)^2-X^2)+a_0((X+1)-X).$$

Les termes en X^{n+1} s'éliminent et donc $\varphi(P)(X)\in\mathbb{R}_n[X]$.

Finalement $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$
On note $\mathcal{B}=(1,X,\ldots,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $j\in\{0,\ldots,n\}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(X^j) &= \frac{1}{j+1}((X+1)^{j+1}-X^{j+1}) = \frac{1}{j+1}\left(\sum_{k=0}^{j+1}\binom{j+1}{k}X^k-X^{j+1}\right) \\ &= \frac{1}{j+1}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j+1}{k}X^k\right) = X^j+\cdots \end{aligned}.$$

Ainsi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ 0 & 0 & \frac{3}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n} \end{pmatrix}$. Et donc $\mathrm{tr}(\varphi)=\mathrm{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi))=n+1$.

Solution de l'exercice 6

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus si $\operatorname{tr}(A) \neq -1$, prenons $M \in$Ker(f). Alors M+tr$(M)A = 0$ et en prenant la trace tr$(M)(1$+tr$(A)) = 0$ donc tr$(M) = 0$. En reportant dans M+tr$(M)A = 0$, on trouve $M = 0$.
Ainsi f est injective et (à justifier par un argument de dimension) bijective.
2. Montrons que Ker(f) =Vect$\{A\}$ (par double inclusion).
Si $M \in$Ker(f) alors $M = -$tr$(M)A \in$Vect$\{A\}$.
Si $M \in$Vect$\{A\}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $M = \lambda A$ et $f(M) = \lambda f(A) = 0$ car tr$(A) = -1$.
Par la formule du rang Im(f) est un hyperplan.
Si tr$(M) = 0$ alors $M = f(M) \in$Im(f) donc Im(f) contient le noyau de la forme linéaire trace qui est aussi un hyperplan.
Ainsi, Im(f) est l'ensemble des matrices de trace nulle (inclusion + même dimension).
3. On revient au cas général et on distingue deux cas.
• si tr$(A) \neq -1$: alors f est bijective et donc l'équation admet une unique solution (antécédent de b par f).
Plus précisément : si X+tr$(X)A = B$ alors tr$(X)(1$+tr$(A))$ =tr(B) et donc tr$(X) = \dfrac{\operatorname{tr}(B)}{1+\operatorname{tr}(A)}$ et

$$X = B - \frac{\operatorname{tr}(B)}{1+\operatorname{tr}(A)}A.$$

• si tr$(A) = -1$: Si tr$(B) \neq 0$ alors $B \notin$Im(f) et $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si tr$(B) = 0$.
Soit X une solution de l'équation alors :

$$X = B - \operatorname{tr}(M)A \in B + \operatorname{Vect}\{A\}.$$

Réciproquement, puisque tr$(A) = -1$, on vérifie que si $X \in B$+Vect$\{A\}$ alors X est solution de l'équation.
$\mathcal{S} = B$+Vect$\{A\}$ (droite affine).

Solution de l'exercice 7

1. Par définition, les colonnes des M sont les vecteurs coordonnées de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On a $M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f - Id) &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y - z &=& 0 \\ 2x + z &=& 0 \\ 4x - 2y + 3z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& -2x \\ y &=& x + z = -x \\ 4x + 2x - 6x &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff u = x(1,-1,-2)
\end{aligned}$$

On choisit $\boxed{e_1' = (1,-1,-2).}$

3. On a $M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Elle est clairement de rang 1 donc son noyau est de dimension 2. On a les équivalences suivantes.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - 2Id) \iff 2x - y + z = 0 \iff (x, y, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1).$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - 2Id) = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$. On choisit : $\boxed{e'_2 = (1, 2, 0) \text{ et } e'_3 = (0, 1, 1).}$

4. Le déterminant de (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc $\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } E.}$

5. Par construction, on a $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = 2e'_3$. Donc :

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Et par les formules de changement de base, on a :

$$D = P^{-1}MP \text{ avec } P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Par une récurrence simple, on montrerait que $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$.
Or D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Et en effectuant le produit PD^nP^{-1}, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -1 + 2^n & 1 - 2^n \\ -2 + 2^{n+1} & 1 & -1 + 2^n \\ -4 + 2^{n+2} & 2 - 2^{n+1} & -2 + 3.2^n \end{pmatrix}.}$$

Solution de l'exercice 8

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x + y + 2z \\ -3x + 2y + 2z \\ -7x + 3y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Et donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.}$

2. On obtient (raisonnement à détailler) $\mathrm{Ker}(f - 3Id) = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 2)\}$. On prend :

$$\boxed{e'_1 = (1, 1, 2).}$$

3. On obtient (raisonnement à détailler) $\text{Ker}(f - Id) = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$. On prend :

$$\boxed{e'_2 = (1,1,1).}$$

4. Le déterminant de (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc $\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } E.}$

5. Le calcul donne $f(e'_3) = (4,3,5)$.

6. On a par construction $f(e'_1) = 3e'_1$ et $f(e'_2) = e'_2$.
La question précédente donne $f(e'_3)$ dans la base $\mathcal{B}$. Il fuat l'exprimer dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3. On cherche pour cela, $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(e'3) = ae'_1 + be'_2 + ce'_3$.
Ici, c'est assez facile. On a immédiatement :

$$f(e'_3) = (4,3,5) = (1,1,1) + (3,2,4) = e'_2 + e'_3.$$

Donc :

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et par les formules de changement de base, on a :

$$T = P^{-1}MP \text{ avec } P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Par une récurrence simple, on montrerait que $M^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1}$.

Avec le binôme de Newton, ou par une récurrence simple, on montrerait $T^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Et en effectuant le produit PD^nP^{-1}, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} -2.3^n + n + 3 & 3^n - n - 1 & 3^n - 1 \\ -2.3^n + n + 2 & 3^n - n & 3^n - 1 \\ -4.3^n + n + 4 & 2.3^n - n - 2 & 2.3^n - 1 \end{pmatrix}.}$$

Solution de l'exercice 9

1. On pourrait le démontrer par analyse-synthèse en utilisant (chapitre Réduction) que le polynôme caractéristique $P(X) = X^2(X-2)$ annule u.
Ici, comme $E = \mathbb{R}^3$ et que l'on connaît u, on peut chercher explicitement les deux noyaux.

• On calcule M^2, on obtient que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M^2)$ si et seulement si $x + y - z = 0$, ainsi $\text{Ker}(M^2)$ est de dimension 2 (donc $\text{Ker}(u^2)$ aussi).

D'autre part, $M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang au moins 2 car ses deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires, et elle est de rang 2 car $C_1 + C_2 = 0$.

Par le théorème du rang, son noyau est de dimension 1 (il est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Ainsi $\text{Ker}(u - 2Id) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$ est de dimension 1.
On a donc $\boxed{\dim(\text{Ker}(u^2)) + \dim(\text{Ker}(u - 2Id)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).}$

• On montre maintenant que l'intersection est réduite à $\{0\}$.
Soit $a \in \text{Ker}(u^2) \cap \text{Ker}(u - 2Id)$.
$a \in \text{Ker}(u - 2Id) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = (\lambda, \lambda, 0)$.
De plus $a \in \text{Ker}(u^2)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $x + y - z = 0$. On obtient $\lambda = 0$ et donc $a = 0$.
Par conséquent $\boxed{\text{Ker}(u^2) \cap \text{Ker}(u - 2Id) = \{0\}.}$

Et par caractérisation :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Ker}(u - 2Id).}$$

2. La matrice M est de rang au moins 2 car ses deux premières colonnes sont indépendantes. Ses 2 dernières colonnes étant colinéaires, elle est de rang 2. Donc sont noyau est de dimension 1. Comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans ce noyau, il l'engendre.
Par conséquent, $\text{Ker}(u) = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$ est de dimension 1.
On a clairement $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$, mais l'inclusion est stricte par un argument de dimension.
3. Par définition de matrice dans une base, on cherche une $\boxed{\text{base}}$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que :

$$\boxed{u(e_1) = 0,\ u(e_2) = e_1 \text{ et } u(e_3) = 2e_3.}$$

• Pour e_3, c'est facile : $u(e_3) = 2e_3 \iff e_3 \in \text{Ker}(u - 2Id)$. On prend donc par exemple : $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• On construit e_1 et e_2 ensemble (ils sont liés par $u(e_2) = e_1$)
On a donc nécessairement $u^2(e_2) = u(e_1) = 0$.
On choisit donc pour e_2 un vecteur de $\text{Ker}(u^2)$ et qui n'est pas dans $\text{Ker}(u)$ (il ne doit donc pas vérifier $y = z$).
Par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On pose $e_1 = u(e_2) = -4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u)$.
(e_1, e_2) est une famille libre (et donc une base par argument de dimension) de $\text{Ker}(u^2)$. Et par construction, on a bien : $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.
• Il reste à vérifier que c'est une base, par exemple en calculant le déterminant de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

4. Il suffit de déterminer les matrices des endomorphismes cherchés dans la base (e_1, e_2, e_3).
Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On note $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ la matrice de g.
On a les équivalences suivantes.

$$u \circ g = g \circ u \iff MN = NM \iff \begin{cases} d = g = h = f = c = 0 \\ e = a \end{cases} \iff N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 10

1. On a Ker(u) $\subset$Ker(u^2)) (toujours vrai) et comme $u^3 = 0$, on a aussi Im(u) $\subset$Ker(u^2)).
On montre que Im(u) =Ker(u^2)), en prouvant qu'ils ont même dimension.
On a déja $\dim(\mathrm{Im}(u)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leq 2$ car $u^2 \neq 0$.
De plus on a supposé que Ker(u) est de dimension 1 donc par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3 - 1 = 2$, et finalement :
$\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$ et avec l'inclusion, on obtient bien Im(u) =Ker(u^2)), et donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)) = \mathrm{Im}(u).}$$

2. On cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$.
On a donc nécessairement $u^2(e_3) = u(e_2) = e_1 \neq 0$.
Or u^2 n'est pas nul, donc il existe e_3 tel que $u^2(e_3) \neq 0$.
Ce e_3 étant trouvé, on pose alors $e_2 = u(e_3)$ et $e_1 = u^2(e_3) = u(e_2) \neq 0$.
On a bien :
$u(e_1) = u^3(e_3) = 0$ car $u^3 = 0$
$u(e_2) = e_1$
$u(e_3) = e_2$
Il reste à montrer qu'on a bien construit une base. Soient a_1, a_2, a_3 des réels tels que :

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = a_1u^2(e_3) + a_2u(e_3) + a_3e_3 = 0.$$

En appliquant u^2 (linéaire) à cette égalité, il reste : $a_3u^2(e_3) = 0$ et comme $u^2(e_3) \neq 0$, $a_3 = 0$.
Il reste $a_1u^2(e_3) + a_2u(e_3) = 0$. En appliquant u, on obtient $a_2 = 0$. Puis $a_1 = 0$.
La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donc libre. Comme elle est de cardinal $3 = \dim(E)$, c'est bien une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Remarque : ce raisonnement est valable pour tout endomorphisme nilpotent dont l'indice de nilpotence est égal à la dimension de E. On n'a pas besoin de la question 1....

Solution de l'exercice 11

1. puisque $u^2 = 0$, on a Im(u) $\subset$Ker(u).
De plus rg$(u) = 2$, donc par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(u))$.
Et finalement $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u).}$
2. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de Im(u) et e_3, e_4 tels que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$.
Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base puis qu'elle convient (fait en classe)

Solution de l'exercice 12

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $m_{i,j} = 1 + a_i a_j$ et on considère la matrice $M = [m_{i,j}]_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$.

On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Si C_j est la j-ième colonne de M, on a facilement

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad C_j = U + a_j A \in \mathrm{Vect}\{U, A\}.$$

Or $\mathrm{Vect}\{U, A\}$ est de dimension 1 ou 2 ainsi, si $n \geq 3$, la famille $\{C_1, \dots, C_n\}$ est liée et donc $\boxed{\det(M) = 0.}$

- Si $n = 1$ alors $\det(M) = 1 + a_1^2$.
- Si $n = 2$ alors $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & 1 + a_1 a_2 \\ 1 + a_1 a_2 & 1 + a_2^2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} (a_2 - a_1) \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 \\ 1 + a_1 a_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)^2$.

Solution de l'exercice 13

On note $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\Delta = \det_{\mathcal{B}}(a_1 E_1 + xU, \dots, a_n E_n + xU)$.
On développe en utilisant la n-linéarité. Si la colonne xU apparaît deux fois, le déterminant est nul (caractère alterné). Il reste les termes suivants :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}} \left(a_1 E_1, \dots, a_{j-1} E_{j-1},\ xU\ , a_{j+1} E_{j+1}, \dots, a_1 E_1 \right) + \det_{\mathcal{B}}(a_1 E_1, \dots, a_n E_n) \\ &= x \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_j \right) + \prod_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 14

1. On suppose d'abord que a et b sont distincts.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \cdots & \cdots & \cdots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & a + x & \cdots & \cdots & a + x \\ b + x & b + x & \lambda_3 + x & a + x & \cdots & a + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & b + x & \cdots & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$.

Pour $j = 2, \dots, n$ on effectue $C_j \longleftarrow C_j - C_1$. Dans ces colonnes, les x disparaissent. On développe alors suivant la première colonne. On obtient bien que

$$\boxed{D \text{ est une fonction polynôme de degré } \leq 1.}$$

Il existe donc des constantes réelles λ et μ (dépendant de $a, b, \lambda_1, \dots, \lambda_n$) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(x) = \lambda x + \mu.$$

Pour simplifier la rédaction, on pose $P(X) = (X - \lambda_1) \times \cdots \times (X - \lambda_n)$.
Or, lorsque $x = -b$, le déterminant est triangulaire et donc $D(-b) = (\lambda_1 - b) \times \cdots \times (\lambda_n - b) = (-1)^n P(b)$.
De même, lorsque $x = -a$, on trouve $D(-a) = (\lambda_1 - a) \times \cdots \times (\lambda_n - a) = (-1)^n P(a)$.
Pour connaître $D(x)$, il suffit de déterminer λ, μ et donc de résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} -\lambda a + \mu = D(-a) = (-1)^n P(a) \\ -\lambda b + \mu = D(-b) = (-1)^n P(b) \end{cases}$$

Puisque $(b - a) \neq 0$, ce système est de Cramer, et donc il admet une solution (λ, μ) unique donnée par :

$$\lambda = (-1)^n \frac{P(a) - P(b)}{b - a} \qquad \text{et} \qquad \mu = (-1)^n \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}.$$

Et donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ D(x) = \frac{(-1)^n}{b - a} \left((P(a) - P(b))x + bP(a) - aP(b)\right).}$

En particulier, si $x = 0$, on retrouve le déterminant de A et donc

$$\boxed{\text{Si } a \neq b \text{ alors } \det(A) = (-1)^n \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}.}$$

2. Si $a = b = 0$ on a clairement $\det(A) = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$.
Supposons maintenant que a et b sont égaux et non nuls. On considère l'application f qui a $t \in \mathbb{R}$ associe le déterminant de la matrice A précédente avec $b = t$ et le reste inchangé. D'après la question précédente, si $t \neq a$ alors $f(t) = (-1)^n \dfrac{tP(a) - aP(t)}{t - a}$ et on cherche $f(a)$.
Le déterminant étant $n-$linéaire, l'application f est continue sur R et donc $f(a) = \lim\limits_{t \to a} f(t)$.
Or si $t \neq a$ et $t \neq 0$ alors

$$f(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{at} \frac{tP(t) - aP(a)}{t - a}.$$

Le second facteur est un taux d'accroissement.
Si $g(t) = tP(t)$ alors $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{tP(t) - aP(a)}{t - a} = g'(a) = aP'(a) + P(a)$.
Et finalement $f(a) = \lim\limits_{t \to a} f(t) = (-1)^{n+1} \dfrac{aP'(a) + P(a)}{a^2}$ et donc

$$\boxed{\text{Si } a = b \neq 0 \text{ alors } \det(A) = (-1)^{n+1} \frac{aP'(a) + P(a)}{a^2}.}$$

Remarque : L'expresion de $\det(A)$ en fonctions les paramètres $a, b\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est possible, mais elle est assez lourde.

Solution de l'exercice 15

On pourra utiliser les mêmes opération que dans le calcul d'un déterminant de Vandermonde.

$$L_5 \longleftarrow L_5 - x_2 L_4, \text{ puis } L_4 \longleftarrow L_4 - x_2 L_3, \text{ puis } L_3 \longleftarrow L_3 - x_2 L_2, \text{ puis } L_2 \longleftarrow L_2 - x_2 L_1.$$

On obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 - x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1(x_1 - x_2) & 2x_1 - x_2 & 0 & x_2 & 2 \\ x_1^2(x_1 - x_2) & x_1(3x_1 - 2x_2) & 0 & x_2^2 & 4x_2 \\ x_1^3(x_1 - x_2) & x_1^2(4x_1 - 3x_2) & 0 & x_2^3 & 6x_2^2 \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la 3ème colonne, puis en sortant le facteur x_1-x_2 de la première colonne, on obtient :

$$\Delta=(x_1-x_2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ x_1 & 2x_1-x_2 & x_2 & 2\\ x_1^2 & x_1(3x_1-2x_2) & x_2^2 & 4x_2\\ x_1^3 & x_1^2(4x_1-3x_2) & x_2^3 & 6x_2^2\end{vmatrix}.$$

On effectue alors l'opération $C_2\longleftarrow C_2-C_1$, et on sort un nouveau facteur (x_1-x_2) sur la 2ème colonne.

$$\Delta=(x_1-x_2)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ x_1 & 1 & x_2 & 2\\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 4x_2\\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 6x_2^2\end{vmatrix}.$$

On reprend les opérations du calcul d'un déterminant de Vandermonde.

$$L_4\longleftarrow L_4-x_2L_3,\text{ puis } L_3\longleftarrow L_3-x_2L_2,\text{ puis } L_2\longleftarrow L_2-x_2L_1.$$

$$\Delta=(x_1-x_2)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ x_1-x_2 & 1 & 0 & 2\\ x_1(x_1-x_2) & 2x_1-x_2 & 0 & 2x_2\\ x_1^2(x_1-x_2) & x_1(3x_1-2x_2) & 0 & 2x_2^2\end{vmatrix}.$$

En développant suivant la 3ème colonne, puis en sortant le facteur x_1-x_2 de la première colonne, on obtient :

$$\Delta=(x_1-x_2)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ x_1 & 2x_1-x_2 & 2x_2\\ x_1^2 & x_1(3x_1-2x_2) & 2x_2^2\end{vmatrix}=2(x_1-x_2)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & 2x_1-x_2 & x_2\\ x_1^2 & x_1(3x_1-2x_2) & x_2^2\end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations $C_2\longleftarrow C_2-C_1$ et $C_3\longleftarrow C_3-C_1$. On peut sortir 2 facteurs (x_1-x_2).

$$\Delta=2(x_1-x_2)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x_1 & x_1-x_2 & x_2-x_1\\ x_1^2 & x_1(2x_1-2x_2) & x_2^2-x_1^2\end{vmatrix}=2(x_1-x_2)^5\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x_1 & 1 & -1\\ x_1^2 & 2x_1 & -x_1-x_2\end{vmatrix}=2(x_1-x_2)^5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2x_1 & -x_1-x_2\end{vmatrix}$$

La conclusion est immédiate.

Solution de l'exercice 16

Faire deux développements successifs par rapport à une ligne/colonne pour obtenir une relation de récurrence linéaire d'orde 2.
Les conditions initiales (éventuellement en utilisant un D_0 judicieux) permettent de déterminer les constantes dans l'expression de D_n.
Par un développement suivant la première ligne, puis la première colonne (ou l'inverse), on trouve :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad D_{n+2}-4D_{n+1}+4D_n=0.$$

En posant $D_0=1$, cette relation devient aussi vraie pour $n=0$, et puisque $D_1=4$, on a $D_n=(n+1)2^n$.

Solution de l'exercice 17

Puisque B est de rang 1 elle est semblable à une matrice B' dont toute les colonnes sauf la première sont nulles.
Soit $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B'=P^{-1}BP$. On pose $A'=P^{-1}AP$.
On note C la première colonne de B', les autres sont nulles.

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A' et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Par définition du déterminant, et par n-linéarité, on a :

$$\det(A'+B') = \det_{\mathcal{B}}(C_1+C, C_2, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, \dots, C_n) + \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(C, C_2, \dots, C_n)}_{=\alpha} = \det(A') + \alpha$$

$$\det(A'-B') = \det_{\mathcal{B}}(C_1-C, C_2, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, \dots, C_n) - \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(C, C_2, \dots, C_n)}_{=\alpha} = \det(A') - \alpha$$

Et donc $\det(A'+B')\det(A'-B') = \det(A')^2 - \alpha^2 \leq \det(A')^2$.
En remplaçant A' et B' en fonction de A et B, on btient le résultat demandé.