Exercices d'entraînement corrigés n°7

Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1 (❄)

Montrer que l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = {}^tM\}$ des matrices $n \times n$ symétriques réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Indication

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en utilisant la caractérisation du cours.

Exercice 2 (❄)

Montrer que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - y = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = 0\}$.

Indication

Érire F_i sous forme d'un Vect$\{\dots\}$.

Exercice 3 (❄)

Dans $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = x\cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = x\sin(x).$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une famille libre.

Indication

Écrire une combinaison linéaire de ces quatre **fonctions** qui est nulle, et montrer que chaque coefficient est nul. On pourra évaluer en certains points judicieux, dériver...

Exercice 4 (❄)

Dans $\mathbb{C}^3$, on note

$$u_1 = (1, i, 0),\ u_2 = (1, 1, 2+2i) \ \text{ et } \ u_3 = (1, 0, 2).$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

Indication

Il ne faut pas être perturbé par les complexes. C'est le même raisonnement que dans $\mathbb{R}^3$ (voir DNS0 exercice rédigé 5).

Exercice 5 (❉)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants.

$$P = \text{Vect}\{(1,-1,0),(1,1,1)\} \quad \text{et} \quad D = \{(x,y,z) \in E, 2x - y = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}.$$

1. Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de D.
3. Déterminer une équation linéaire définissant P.
4. Montrer que P et D sont supplémentaires dans E.

Indication

Question 3 : Montrer que l'intersection est réduite à $\{0\}$, puis utiliser un argument de dimension. On peut aussi utiliser la caractérisation par concaténation des bases.

Exercice 6 (❉)

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. En utilisant les définitions du cours (noyau, image, somme, intersection), montrer les inclusions suivantes.

1. $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ (on rappelle que $f^2 = f \circ f$)
2. $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$
3. $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f+g)$
4. $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Indication

Utiliser la définition de noyau et d'image d'une application linéaire.
Pour montrer que $A \subset B$, on prend $x \in A$, on écrit ce que cela signifie, et on essaie de montrer que x appartient à B en s'appuyant que la définition de B.

Solutions

Solution de l'exercice 1

On montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a :
• $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
• F est non vide car la matrice nulle est symétrique.
• Enfin, soient M, N deux matrices de F et λ, μ des réels. Montrons que $\lambda M + \mu N$ est symétrique. Puisque M et N sont symétriques, on a $M = {}^tM$ et $N = {}^tN$.

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda M + \mu N) &= \lambda\, {}^tM + \mu {}^tN \\ &= \lambda M + \mu N. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda M + \mu N \in F$ et F est bien stable par combinaisons linéaires.

Conclusion : $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{, c'est donc un espace vectoriel.}}$

Solution de l'exercice 2

• Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} u \in F_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x - y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad u = (x, y) = (x, 2x) = x(1, 2) \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in \text{Vect}\{(1, 2)\} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F_1 = \text{Vect}\{(1, 2)\} \text{ est un espace vectoriel.}}$

• Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} u \in F_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x + y - z = 0 \text{ et } 2x - z = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z = 2x \text{ et } y = z - x = x \\ &\Longleftrightarrow \quad u = (x, y, z) = (x, x, 2x) = x(1, 1, 2) \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in \text{Vect}\{(1, 1, 2)\} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F_2 = \text{Vect}\{(1, 1, 2)\} \text{ est un espace vectoriel.}}$

• Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} u \in F_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad x + 2y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2y \\ &\Longleftrightarrow \quad u = (x, y, z) = (-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F_3 = \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ est un espace vectoriel.}}$

Solution de l'exercice 3

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$.
Cette égalité de fonctions s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},} \; af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x) = 0.$$

Ainsi, on peut donner une valeur quelconque à x (judicieuse quand même !), ou encore dériver ou même intégrer sur un intervalle. On pourrait aussi considérer des limites.

• En spécialisant en $x = 0$, il reste $a = 0$.

• Puis, en spécialisant en $x = \pi$, on trouve $-b\pi = 0$ donc $b = 0$.
Il reste alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad cf_3(x) + df_4(x) = 0 = c\sin(x) + dx\sin(x) = 0.$$

• En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c\cos(x) + d(x\cos(x) + \sin(x)) = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on trouve $c = 0$, puis en $x = \pi$, $d = 0$.

Ainsi, $a = b = c = d = 0$, donc $\boxed{\text{la famille } \{f_1, f_2, f_3, f_4\} \text{ est une famille libre.}}$

Solution de l'exercice 4

On résout $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ est la seule solution, alors la famille est libre. Sinon, on obtient une (ou plusieurs) relation linéaire non triviale liant u_1, u_2, u_3.

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad &\iff \quad a\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+2i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ ia + b = 0 \\ (2+2i)b + 2c = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} ia = -b \ \text{ i.e. } \ a = ib \\ c = -(1+i)b \end{cases} \\
&\iff \quad (a, b, c) = (ib, b, -(1+i)b)
\end{aligned}$$

Finalement pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $ibu_1 + bu_2 - (1+i)bu_3 = 0$ et donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ n'est pas libre.}}$
En particulier, avec $b = 1$, on trouve la relation linéaire non triviale suivante.

$$iu_1 + u_2 - (1+i)u_3 = 0.$$

Solution de l'exercice 5

1. D'après le cours, $P = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 0), (1, 1, 1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   De plus, Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
u \in D \quad &\iff \quad 2x - y = 0 \text{ et } x - y + z = 0 \\
&\iff \quad y = 2x \text{ et } z = y - x = x \\
&\iff \quad u = (x, y, z) = (x, 2x, x) = x(1, 2, 1) \\
&\iff \quad u \in \mathrm{Vect}\{(1, 2, 1)\}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $D = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(1, 2, 1)\}$ est une famille génératrice de D, et comme elle est constituée d'un seul vecteur, et qu'il est non nul, c'est une famille libre.

$$\boxed{\{(1, 2, 1)\} \text{ est une base de } D.}$$

3. **Méthode 1 : en utilisant la définition.** Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes (définition de Vect à connaître).

$$\begin{array}{rcl} u \in P & \iff & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = a(1,-1,0) + b(1,1,1) \\ & \iff & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x &=& a+b \\ y &=& -a+b \\ z &=& b \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} b &=& z \\ a &=& x-b = x-z \end{cases} & \text{(toujours vrai)} \\ y = -(x-z)+z \end{cases} \\ & \iff & x+y-2z = 0 \end{array}$$

Méthode 2 : à l'aide d'un déterminant. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{rcl} u \in P & \iff & u = (x,y,z) \in \mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(1,1,1)\} \\ & \iff & \mathrm{Vect}\{(x,y,z),(1,-1,0),(1,1,1)\} \text{ est liée,} \\ & \iff & \det_{\mathcal{B}}\Big((x,y,z),(1,-1,0),(1,1,1)\Big) = 0 \\ & \iff & \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & -1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(on développe selon la première colonne)} \\ & \iff & x\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

On retrouve : $\boxed{P : x+y-2z = 0.}$

4. Soit $u \in P \cap D$.
   - $u \in D$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1,2,1) = (\lambda, 2\lambda, \lambda)$.
   - $u \in P$ donc ses coordonnées vérifient l'équation obtenue en question précédente :

   $$\lambda + 2\lambda - 2\lambda = 0 \text{ donc } \lambda = 0.$$

   Ainsi, $u = \lambda(1,2,1) = 0$ et on a donc $P \cap D = \{0\}$.
   De plus $\dim(P) + \dim(D) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{\mathbb{R}^3 = P \oplus D.}$

Solution de l'exercice 6

1. Soit $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f)}$. On a donc $f(x) = 0$. Et comme f est linéaire : $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) \underset{f \text{ linéaire}}{=} 0$.
   Donc $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f^2)}$.

   On a bien démontré : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2).}$

2. Soit $\boxed{x \in \mathrm{Im}(f^2)}$. Par définition, il existe $z \in E$ tel que $x = f^2(z)$.
   Ainsi, $x = f(f(z))$ et donc $\boxed{x \in \mathrm{Im}(f)}$.

   On a bien démontré : $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).}$

3. Soit $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)}$. Ainsi :

- $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0$,
- $x \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $g(x) = 0$.

Alors, par définition de la somme de deux fonctions, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$.

Donc $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f+g)}$.

On a bien démontré : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g).}$

4. Soit $\boxed{x \in \mathrm{Im}(f+g)}$. Par définition, il existe $z \in E$ tel que $x = (f+g)(z)$.
   Alors, par définition de la somme de deux fonctions, $x = (f+g)(z) = f(z) + g(z)$.
   Or $f(z) \in \mathrm{Im}(f)$ et $g(z) \in \mathrm{Im}(g)$.
   Donc, par définition de somme de deux sous-espaces vectoriels, on a bien $\boxed{x \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)}$.

   On a bien démontré : $\boxed{\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).}$