Exercices d'entraînement corrigés n°3

Suites numériques, comportement local

Exercice 1 (❄)

Déterminer les développements limiés suivants.

$f_1(x) = e^{\cos(2x)}$ à l'ordre 4 en 0

$f_2(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0

$f_3(x) = \dfrac{\cos(\sin(x))}{1+\mathrm{sh}(x)}$ à l'ordre 3 en 0

$f_4(x) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}}$ à l'ordre 4 en 0

Indication

Pour f_1 : utiliser les propriétés de l'exponentielle pour se ramener en 0.

Exercice 2 (❄)

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\mathrm{sh}(x)} - \frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n\ln(n^3+2)}{\ln(n-1)n^2+2} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(n)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{1/x^2} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\ln(n)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(x\ln(x+1) - x\ln(x-1)\Big)$$

Indication

Limite 1 : par exemple, réduire au même dénominateur et utiliser les developpements limités du numérateur et du dénominateur.
Limite 2 : trouver un équivalent du numérateur et un du dénominateur.
Limite 3 : factoriser par le plus gros terme dans le ln.
Limites 4 et 5 : attention, passer à l'écriture exponentielle et utiliser les développements limités.
Limite 6 : factoriser par le plus gros terme dans les ln et utiliser les développements limités, ou bien utiliser les propriétés algébrique de ln .

Exercice 3 (❄)

Déterminer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants.

1. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
3. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

Indication

Classique. À maîtriser.

Exercice 4 (❄)

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication

Classique. À maîtriser.

Exercice 5 (Suite récurrente - ❄❄)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Déterminer les points fixes de la fonction $f : x \longmapsto x + x^2$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que si $u_0 \in]0, +\infty[$ (resp. $u_0 \in]-\infty, -1[$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. Montrer que si $u_0 \in [-1, 0]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Indication

Question 2 : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
Question 3 : montrer (avec un argument précis de continuité) que la seule limite possible est 0. Utiliser le théorème de la limite monotone.

Exercice 6 (Suite définie implicitement - ❄❄)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $xe^{\sqrt{x}} = \sqrt{n}$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$. On note x_n cette solution.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et déterminer un équivalent simple de x_n au voisinage de $+\infty$.

Indication

Question 1 : appliquer rigoureusement (hypothèses !) le théorème de la bijection.
Question 2 : Pour la limite utiliser les propriétés de la bijection réciproque de f (tableau de variations). Pour l'équivalent, utiliser les croissances comparées pour négliger des termes.

Solutions

Solution de l'exercice 1

- $$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{\cos(2x)} = \exp\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{4!}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \\ &= e\times\exp\left(\underbrace{-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{4!}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}_{=u(x)}\right) = e\left(1+u(x)+\frac{u(x)^2}{2}+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(u(x)^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^4)}\right) \\ &= e\left(1+\left(-2x^2+\frac{2}{3}x^4\right)+\frac{1}{2}(4x^4)+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \\ &= e-2ex^2+\frac{8}{3}ex^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_2(x) &= \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1\ \underbrace{-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}_{=u(x)}\right) = u(x)-\frac{u(x)^2}{2}+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(u(x)^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^4)} \\ &= \left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right)-\frac{1}{2}\frac{x^4}{6\times 6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= \frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{\cos(\sin(x))}{1+\operatorname{sh}(x)} = \frac{1-\frac{1}{2}\sin^2(x)+\underset{x\to 0}{o}(\sin^3(x))}{1+x+\frac{x^3}{3!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1-\left(x+\frac{x^3}{3!}\right)+\left(x+\frac{x^3}{3!}\right)^2-\left(x+\frac{x^3}{3!}\right)^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1-x+x^2-\frac{7}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = 1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_4(x) &= \sqrt{\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}} = \left(1\ \underbrace{-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}_{=u(x)}\right)^{1/2} \\ &= 1+\frac{u(x)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2(x)+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(u(x)^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^4)} \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)-\frac{1}{8}\frac{x^4}{9}+\underset{x\to 0}{o}(x^4) = 1-\frac{1}{6}x^2+\frac{31}{360}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

- On a $\dfrac{\cos(x)}{\text{sh}(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\cos(x) - \text{sh}(x)}{x\text{sh}(x)}$.

$x\cos(x) - \text{sh}(x) = x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - \left(x + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = -\dfrac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et :

$$\frac{\cos(x)}{\text{sh}(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x\cos(x) - \text{sh}(x)}{x\text{sh}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2x^3/3}{x^2} = -\frac{2x}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\text{sh}(x)} - \frac{1}{x}\right) = 0}$$

- On a :

$$\begin{aligned}\frac{n^2 + 3n\ln(n^3+2)}{\ln(n-1)n^2+2} &= \frac{n^2 + 3n\ln(n^3(1+2/n^3))}{\ln(n-1)n^2+2} \\ &= \frac{n^2 + 9n\ln(n) + 3n\ln(1+2/n^3)}{\ln(n-1)n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{\ln(n-1)n^2} = \frac{1}{\ln(n-1)}\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3n\ln(n^3+2)}{\ln(n-1)n^2+2} = 0}$

- On a $\dfrac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n(1+\ln(n)/n))}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1+\ln(n)/n)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\ln(n)/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Donc : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(n)} = 1}$

- On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{1/x^2} &= \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{-1/x^2} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^{-1/x^2} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\right)\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = -\dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \dfrac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$.

Et puisque la fonction exponentielle est continue en $\dfrac{1}{6}$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{1/x^2} = e^{1/6}}$

- On a $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\ln(n)} = \exp\left(\ln(n)\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Or $\ln(n)\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées), et puisque la fonction exponentielle est continue en 0, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\ln(n)} = e^0 = 1}$$

- On a $x\ln(x+1) - x\ln(x-1) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = x\ln\left(\dfrac{2+x-1}{x-1}\right) = x\ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\Big(x\ln(x+1) - x\ln(x-1)\Big) = 2}$$

Solution de l'exercice 3

1. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

   Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0.$$

   Par conséquent, il existe des constantes A, B réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An+B)1^n = An + B$.
   Or, $u_0 = 1 = B$ et $u_1 = -1 = A + B$ donc $A = -2$ et $B = 1$ et finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2n + 1.}$

2. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

   Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0.$$

   Par conséquent, il existe des constantes A, B réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A.2^n + B.(-1)^n$.
   Or, $u_0 = 1 = A + B$ et $u_1 = 0 = 2A - B$ donc $A = \dfrac{1}{3}$ et $B = \dfrac{2}{3}$ et finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}2^n + \frac{2}{3}(-1)^n.}$$

3. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

   Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est

$$r^2 - 2r + 2 = (r - (1+i))(r - (1-i)) = 0.$$

   Puisque $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, il existe des constantes A, B réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

   Or, $u_0 = 0 = A$ et $u_1 = 1 = \sqrt{2}(A+B)\dfrac{\sqrt{2}}{2} = A + B$ donc $A = 0$ et $B = 1$ et finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n/2}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).}$$

Solution de l'exercice 4

1. On détermine d'abord les suites constantes ℓ solution. Si $u_n = \ell$, on a

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \iff \ell = 2\ell + 1 \iff \ell = -1.$$

   Soit maintenant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n + 1$. Puisque $\ell = 2\ell + 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$, en soustrayant membre à membre, on otient : on a

$$v_{n+1} = 2v_n$$

   On reconnaît une suite géométrique.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + 1 = v_n = v_0 2^n = (u_0 + 1)2^n$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n(u_0 + 1) - 1.}$$

2. On sait que $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc :

- Si $u_0 > -1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,
- Si $u_0 < -1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$,
- Si $u_0 = -1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1.

Solution de l'exercice 5

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \ell \text{ est un point fixe de } f &\iff f(\ell) = \ell \\ &\iff \ell + \ell^2 = \ell \\ &\iff \ell = 0 \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(Par conséquent, soit elle est majorée et elle converge (vers un point fixe de f car f est continue), soit elle diverge vers $+\infty$.)

3. Si $u_0 \in]0, +\infty[$: Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, ce serait vers un point fixe de f, c'est-à-dire vers 0.
Et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$.
En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient : $0 \geq u_0 > 0$ contradiction !
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger. Et puisqu'elle est croissante, par le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

4. Si $u_0 \in]-\infty, -1[)$ alors $u_1 = u_0(u_0 + 1) > 0$ et on est ramené au cas précédent.
5. Si $u_0 \in [-1, 0]$ alors on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1, 0]$.

- Pour $n = 0$, le résultat est vrai par hypothèse sur u_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in [-1, 0]$ alors $u_n + 1 \in [0, 1]$ et donc :

$$u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \in [-1, 0].$$

Par le principe de récurrence, on a démontré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [-1, 0].}$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question 2), majorée (par 0) et donc elle converge vers un point fixe de f car f est continue.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0.}$$

Solution de l'exercice 6

1. Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$. La fonction f ainsi définie est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $[0, +\infty[$. Ainsi, tout élément de $[0, +\infty[$ possède un et un seul antécédent par f dans $[0, +\infty[$. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = xe^{\sqrt{x}} = \sqrt{n} \qquad (\textit{On note } x = x_n)$$

2. **Raisonnement analogue à l'exercice résolu précédent.**
On note $g : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ la bijection réciproque de f. La fonction g est alors aussi strictement croissante et $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$. Or $\sqrt{n} = f(x_n)$ donc $x_n = g(\sqrt{n})$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = +\infty.}$

Équivalent : On a $x_n e^{\sqrt{x_n}} = \sqrt{n}$ et donc $\ln(x_n) + \sqrt{x_n} = \dfrac{\ln(n)}{2}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Et comme $\ln(u) + \sqrt{u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \sqrt{u}$, on obtient :

$$\ln(x_n) + \sqrt{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{x_n}.$$

Par transitivité, $\dfrac{\ln(n)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{x_n}$. En élevant au carré : $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{4}.}$